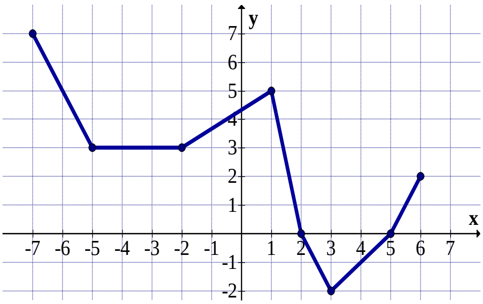
32. WŁASNOŚCI FUNKCJI

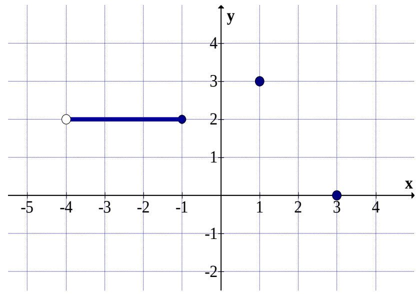
Własności funkcji badamy na podstawie wykresu lub wzoru.
Wytłumaczę Ci wszystkie własności na przykładach różnych funkcji.

DZIEDZINA

Oznaczamy ją $\boldsymbol{D}$ lub $\boldsymbol{D_f}$. Patrzysz, jak na osi $\boldsymbol{X}$ przebiega wykres od lewej strony do prawej. Zapisujesz wszystkie $\boldsymbol{x}$, którym przyporządkowano jakieś wartości $\boldsymbol{y}$. Dziedziną może być zbiór, przedział lub pojedyncze liczby.



$\boldsymbol{D = \langle -7; 6\rangle}$



$\boldsymbol{D = (-4; -1\rangle \cup \{1; 3\}}$

Jeśli masz podać dziedzinę na podstawie wzoru funkcji, to obliczasz, dla jakich $\boldsymbol{x}$ funkcja ma liczbowy sens.

Zapamiętaj reguły obliczania dziedziny funkcji:

1. Jeśli wzór jest w postaci ułamka np. $\boldsymbol{y = \frac{4+x}{x-3}}$ to licznik może być dowolną liczbą, ale mianownik musi być **różny od zera**, czyli $\boldsymbol{x - 3 \neq 0}$, zatem $\boldsymbol{x \neq 3}$. Wtedy dziedziną są liczby rzeczywiste z wyjątkiem **3**.
Zapisujesz to symbolicznie: $\boldsymbol{D = R \setminus \{3\}}$.
Unikasz mianownika zerowego, bo **dzielenie przez zero jest niewykonalne.** Każdą liczbę, która doprowadza mianownik do zera, usuwasz z dziedziny.

Przykład. Obliczymy dziedzinę funkcji $\boldsymbol{y = \frac{4+x}{x+5} - \frac{x}{x-2}}$.
Liczniki pomijasz, a mianowniki: $\boldsymbol{x + 5}$ i $\boldsymbol{x - 2}$ muszą być różne od 0, co zapisujesz: $\boldsymbol{x + 5 \neq 0}$ i $\boldsymbol{x - 2 \neq 0}$, więc $\boldsymbol{x \neq -5}$ i $\boldsymbol{x \neq 2}$.
Liczby $\boldsymbol{(-5)}$ i **2** dają wynik zerowy, więc usuwasz je.
Odp. Dziedziną są wszystkie liczby oprócz (-5) i 2. $\boldsymbol{D = R \setminus \{-5; 2\}}$

2a) Jeśli we wzorze jest **pierwiastek stopnia parzystego** np. $\boldsymbol{y = \sqrt{x-1}}$, to istnieje on tylko z liczb dodatnich lub zera, więc to, co jest pod pierwiastkiem, ma być **większe** lub **równe zero**.
Masz: $\boldsymbol{x - 1 \geq 0}$ to $\boldsymbol{x \geq 1}$, zatem $\boldsymbol{D =< 1; \infty)}$.

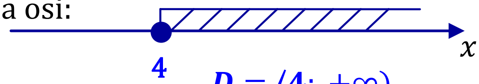
2b) Gdy pierwiastek jest w mianowniku np. $y = \frac{2}{\sqrt{x-3}}$, wtedy wyrażeniu pod pierwiastkiem dasz zwrot $> \mathbf{0}$, bo **wynik zerowy w mianowniku wykluczamy.** Założenie: $x - 3 > 0$ to $x > 3$

Odp. Dziedziną są liczby większe od 3. $D = (3; +\infty)$.

Przykład. Obliczymy dziedzinę funkcji $y = \sqrt{2x - 8}$.

Nie ma tu mianownika, to dasz złożenie $2x - 8 \geq 0$, więc $x \geq 4$.

Zaznaczasz wynik na osi:



$D = \langle 4;\ +\infty)$

Przykład. Obliczymy dziedzinę funkcji $y = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{6-x}}$.

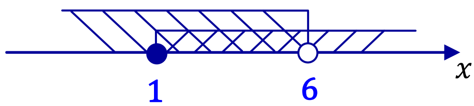
We wzorze są dwa pierwiastki. Licznikowi dasz założenie $\geq \mathbf{0}$, bo wynik zerowy w liczniku może być. Dla mianownika dasz $> \mathbf{0}$, bo unikasz wyniku zerowego.

$y = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{6-x}}$ licznik ≥ 0 mianownik > 0

oba przedziały zaznaczasz na osi:

$x - 1 \geq 0$ i $6 - x > 0$

$x \geq 1$ i $x < 6$



Dziedziną jest wspólna część obu przedziałów. $D = \langle 1; 6)$

Przykład. Obliczymy dziedzinę funkcji $y = \frac{4+x}{|x-3|}$.

Interesuje Cię tylko mianownik, więc $|x - 3| \neq 0$. Według definicji wartości bezwzględnej rozpatrujesz dwa przypadki: pierwszy dla dodatniego wyrażenia i bez zmiany znaków, to $x - 3 \neq 0$ więc $x \neq 3$ i drugi dla ujemnego wyrażenia to z przeciwnymi znakami $-x + 3 \neq 0$ więc $x \neq 3$. Wykluczasz liczbę 3. $D = R \setminus \{3\}$

ZAD. 28. Oblicz dziedzinę funkcji:

a) $y = \frac{4+x}{x^2+9}$ b) $y = \frac{4+x}{x^2-9}$ c) $y = \frac{4+x}{x-9} - \sqrt{x-1}$

® a) $y = \frac{4+x}{x^2+9}$ założenie tylko dla mianownika $x^2 + 9 \neq 0$;

to wyrażenie zawsze jest różne od zera, bo gdy x podniesiesz do kwadratu i dodasz 9, to suma jest zawsze dodatnia; nie ma więc liczb do usunięcia. Dziedziną są wszystkie liczby rzeczywiste. $D = R$

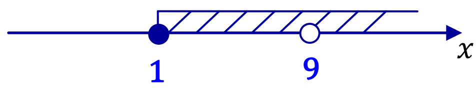
---

b) $y = \frac{4+x}{x^2-9}$ założenie tylko do mianownika rozpisujesz wg wzoru:

$\boldsymbol{x^2 - 9 \neq 0}$ to jest różnica kwadratów: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
$\boldsymbol{(x-3)(x+3) \neq 0}$ każdy czynnik nie może być zerem, więc:
$\boldsymbol{x - 3 \neq 0}$ i $\boldsymbol{x + 3 \neq 0}$ wyznaczasz x;
$\boldsymbol{x \neq 3}$ i $\boldsymbol{x \neq -3}$ te liczby wykluczasz, zatem $\boldsymbol{D = R \setminus \{-3; 3\}}$

---

c) $\boldsymbol{y = \frac{4+x}{x-9} - \sqrt{x-1}}$ założenie dla mianownika i pierwiastka, więc:
$\boldsymbol{x - 9 \neq 0}$ i $\boldsymbol{x - 1 \geq 0}$
$\boldsymbol{x \neq 9}$ i $\boldsymbol{x \geq 1}$ obie odpowiedzi zaznaczasz na jednej osi:



Dziedziną jest przedział $\langle 1; +\infty)$ bez liczby 9. $\boldsymbol{D = \langle 1, +\infty) \setminus \{9\}}$

Praca domowa:

1. Oblicz dziedzinę funkcji:

a) $y = \frac{x-1}{x-7}$ c) $y = \frac{5+3x}{x^2-4}$ e) $y = \sqrt{x+1} - \frac{6}{x}$

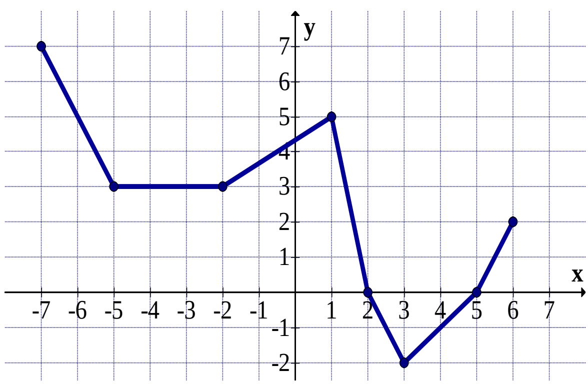
b) $y = \frac{2}{x+4} + \frac{3}{x-1}$ d) $y = \sqrt{3-6x}$ f) $y = \frac{5}{|x-4|}$

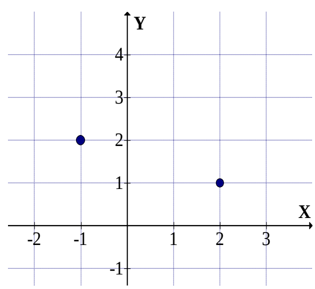
Odpowiedzi:

1. a) $D = R \setminus \{7\}$ d) $D = (-\infty; \frac{1}{2}\rangle$
b) $D = R \setminus \{-4; 1\}$ e) $D = \langle -1; +\infty) \setminus \{0\}$
c) $D = R \setminus \{-2; 2\}$ f) $D = R \setminus \{4\}$

ZBIÓR WARTOŚCI

Zbiór wartości oznaczamy $\boldsymbol{ZW}$. Należy z osi $\boldsymbol{Y}$ od dołu do góry odczytać wszystkie $\boldsymbol{y}$, które zostały przyporządkowane argumentom $\boldsymbol{x}$.



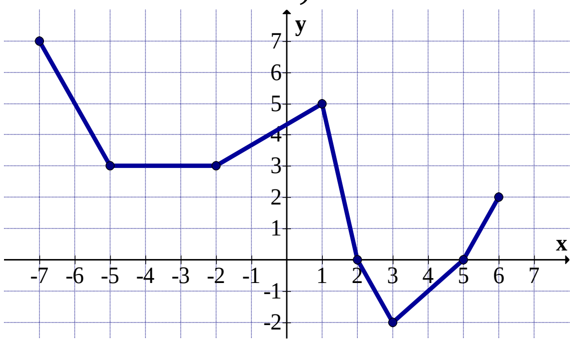


$\boldsymbol{ZW = \langle -2; 7\rangle}$ $\boldsymbol{ZW = \{1; 2\}}$

MIEJSCE ZEROWE

Miejsce lub miejsca zerowe to te argumenty $\boldsymbol{x}$, którym przyporządkowano wartość $\boldsymbol{y = 0}$. Na rys. a) są to punkty przecięcia wykresu z osią $\boldsymbol{X}$. W tabelce b) są to te $\boldsymbol{x}$, dla których $\boldsymbol{y}$ wynosi $\boldsymbol{0}$.

a)



Miejsca zerowe to **2** i **5**.

b)

$\boldsymbol{x}$	2	**3**	5	**6**
$\boldsymbol{y}$	1	**0**	4	**0**

Miejsca zerowe to **3** i **6**.

Miejsce zerowe możesz też obliczyć z wzoru funkcji. Wtedy jej przepis przyrównujesz do zera i obliczasz $\boldsymbol{x}$. Dla funkcji np. $\boldsymbol{y = 4x - 8}$, zapiszesz $\boldsymbol{4x - 8 = 0}$, więc $\boldsymbol{4x = 8}$ $/:2$ i miejsce zerowe to $\boldsymbol{x = 2}$.

Przykłady. Obliczymy miejsca zerowe funkcji:

a) $\boldsymbol{y = 2x + 6}$

$2x + 6 = 0$

$2x = -6 \quad /:2$

$\boldsymbol{x = -3}$

jedno m. zerowe

b) $\boldsymbol{y = \frac{x+2}{5}}$

$\frac{x+2}{5} = 0 \quad /\cdot 5$

$x + 2 = 0$

$\boldsymbol{x = -2}$

jedno m. zerowe

c) $\boldsymbol{y = x^2 + 3x}$

$x^2 + 3x = 0$

wyłączamy x przed nawias

$x \cdot (x + 3) = 0$

$x = 0$ lub $x + 3 = 0$

$\boldsymbol{x = 0}$ lub $\boldsymbol{x = -3}$

dwa miejsca zerowe

----

d) $\boldsymbol{y = \frac{2x+10}{x^2-25}}$ tu należy także ustalić dziedzinę, więc $\boldsymbol{x^2 - 25 \neq 0}$

rozpisujesz na $\boldsymbol{(x + 5)(x - 5) \neq 0}$ i wyliczasz x;

$\boldsymbol{x + 5 \neq 0}$ i $\boldsymbol{x - 5 \neq 0}$

$\boldsymbol{x \neq -5}$ i $\boldsymbol{x \neq 5}$ $\quad \boldsymbol{D = R \setminus \{-5; 5\}}$

Obliczasz miejsce zerowe przyrównując przepis funkcji do zera:

$\boldsymbol{\frac{2x+10}{x^2-25} = 0}$ mnożysz obie strony równania przez mianownik;

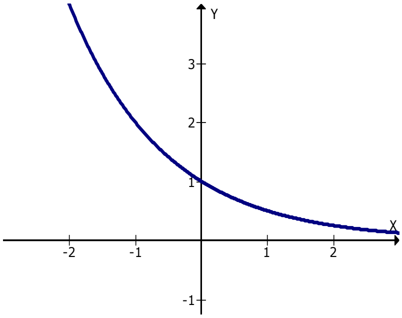
$\frac{2x+10}{x^2-25} = 0 \quad / \cdot (x^2 - 25)$ po skróceniu mianownika masz:

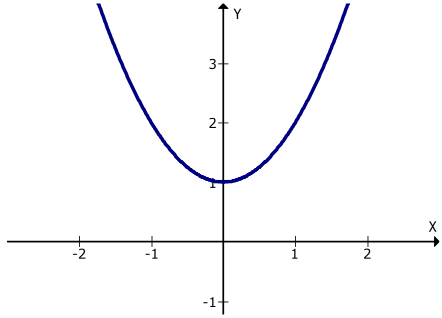
$2x + 10 = 0$ to $2x = -10 \quad /: 2$

$\boldsymbol{x = -5}$ ta liczba jest wykluczona z dziedziny.

Odp. Funkcja nie ma miejsca zerowego.

Nie wszystkie funkcje mają miejsca zerowe. Wtedy ich wykresy nie przecinają osi X. Poniższe wykresy przedstawiają taką sytuację:





MONOTONICZNOŚĆ

Badając monotoniczność określamy, czy funkcja jest rosnąca, malejąca, czy stała. Czasem również badamy, kiedy funkcja jest:
– **nierosnąca**, a więc jest malejąca i stała,
– **niemalejąca**, a więc jest rosnąca i stała,
– **niestała**, a więc jest rosnąca i malejąca.

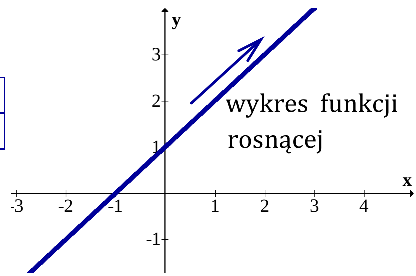
1. Funkcja jest **rosnąca**, gdy rosnącym argumentom x odpowiadają rosnące wartości y. Zatem dla $x_1 < x_2$ mamy $y_1 < y_2$.
Jest też rosnąca, gdy malejącym argumentom odpowiadają malejące wartości y. Dla $x_1 > x_2$ mamy $y_1 > y_2$.

x i y rosną:

x	1	2	3
y	5	7	9

x i y maleją:

x	5	3	2
y	6	4	1



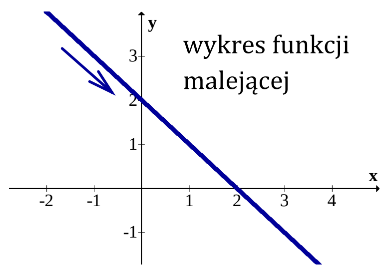
2. Funkcja jest **malejąca,** gdy rosnącym argumentom x odpowiadają malejące wartości y lub malejącym x odpowiadają rosnące y.
Zatem $x_1 < x_2$ i $y_1 > y_2$ lub $x_1 > x_2$ i $y_1 < y_2$.

x rośnie, y maleje

x	1	2	3
y	5	3	2

x maleje, y rośnie

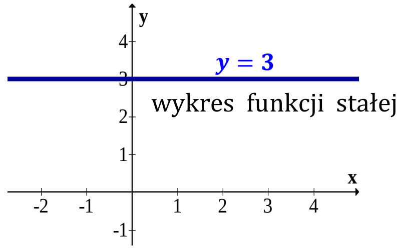
x	7	6	2
y	2	5	8



3. Funkcja jest **stała**, gdy każdemu x odpowiada ta sama wartość y.

x	1	2	3	4	5
y	3	3	3	3	3

Przykład tabelki funkcji stałej.



Monotoniczność można też badać metodą rachunkową. Zrobimy to dla funkcji $y = -2x + 3$.

Założenie: $x_1, x_2 \in R$ i $x_1 < x_2$ i po przeniesieniu $x_1 - x_2 < 0$
Zapisujesz wzory funkcji, gdy za x podstawisz x_1 oraz x_2. Wtedy:

$$y_1 = -2x_1 + 3$$
$$y_2 = -2x_2 + 3$$

Badasz, jaki znak ma różnica $y_1 - y_2$. Podstawiasz:
$y_1 - y_2 = (-2x_1 + 3) - (-2x_2 + 3)$ opuszczasz nawiasy,
$y_1 - y_2 = -2x_1 + 3 + 2x_2 - 3$ redukujesz; otrzymasz:
$y_1 - y_2 = -2x_1 + 2x_2$
Dążysz do uzyskania $x_1 - x_2$ (takie masz w założeniu) i liczbę (-2) wyłączasz przed nawias:
$y_1 - y_2 = -2(x_1 - x_2)$ analizujesz znak tego iloczynu.
Liczba (-2) jest ujemna i różnica $(x_1 - x_2)$ też jest ujemna (założenie).
Iloczyn dwóch liczb ujemnych daje wynik dodatni.
Zatem z założenia jest $x_1 - x_2 < 0$, a z obliczeń $y_1 - y_2 > 0$.
Obie te nierówności mają **zwroty niezgodne**, więc funkcja $y = -2x + 3$ jest malejąca.

Komentarz. Przy zgodnych zwrotach funkcja jest rosnąca.

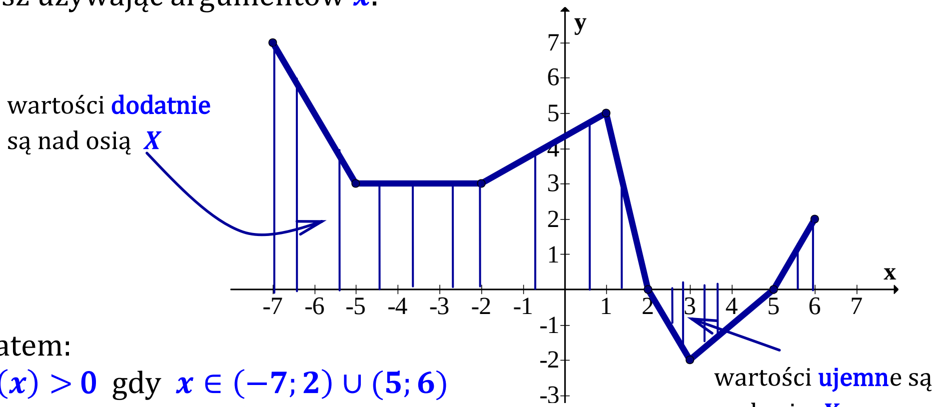
Przykład. Zbadamy monotoniczność $y = x^2$ w przedziale $x \in (0; \infty)$.
Założenie: $x_1, x_2 \in R$ i $x_1 < x_2$ to $x_1 - x_2 < 0$
Zapisujesz wzory y_1 i y_2 zatem $y_1 = {x_1}^2$ i $y_2 = {x_2}^2$
$y_1 - y_2 = {x_1}^2 - {x_2}^2$ zastosujesz wzór skróconego mnożenia;
$y_1 - y_2 = {x_1}^2 - {x_2}^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$

to jest **ujemne** (założenie) to jest **dodatnie**, bo $x \in (0; \infty)$

Iloczyn liczby ujemnej i dodatniej jest ujemny, to końcowy zwrot <0.
W założeniu $x_1 - x_2$ też jest <0. Założenie $x_1 - x_2$ i różnica $y_1 - y_2$ mają zgodne zwroty, więc funkcja jest rosnąca.

WARTOŚCI DODATNIE I UJEMNE

Wartości dodatnie zapisujesz $\boldsymbol{f(x) > 0}$, a ujemne $\boldsymbol{f(x) < 0}$.
Sprawdzasz, które $\boldsymbol{x}$ otrzymały dodatnie $\boldsymbol{y}$, a które ujemne $\boldsymbol{y}$.
Badasz, jaka część wykresu jest **nad** oraz **pod** osią $\boldsymbol{X}$. Przedziały zapisujesz używając argumentów $\boldsymbol{x}$.



Zatem:
$\boldsymbol{f(x) > 0}$ gdy $\boldsymbol{x \in (-7;2) \cup (5;6)}$
$\boldsymbol{f(x) < 0}$ gdy $\boldsymbol{x \in (2;5)}$

Wartości **dodatnie** lub **ujemne** wylicza się także z wzoru funkcji. Wtedy do jej przepisu dołączasz zwrot $\boldsymbol{> 0}$ lub $\boldsymbol{< 0}$ i rozwiązując obie nierówności wyznaczysz $\boldsymbol{x}$. W pierwszym przypadku otrzymasz zbiór dla wartości dodatnich, a w drugim dla wartości ujemnych.

Przykład. Dla jakiego argumentu $\boldsymbol{x}$ funkcja $\boldsymbol{y = 0,2x - 3}$ przyjmuje wartości ujemne?
Wartości ujemne to liczby mniejsze od zera, więc do przepisu funkcji dołączysz zwrot < 0.
$\boldsymbol{0,2x - 3 < 0}$ wyznaczasz x;
$0,2x < 3 \quad /: 0,2$ pozbywasz się 0,2 przy x;
$x < \frac{3}{0,2}$ możesz rozszerzyć ten ułamek przez 10;
$x < \frac{30}{2}$ wyłączasz całości;
$\boldsymbol{x < 15}$
Odp. Funkcja przyjmuje wartości ujemne dla x mniejszych od 15.

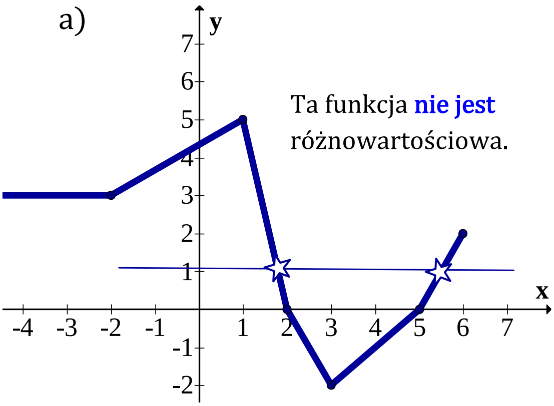
Komentarz. Podałam Ci przykład dla funkcji liniowej, ale dla wszystkich pozostałych tak samo to się odbywa.
Gdy w zadaniu masz polecenie: „Kiedy funkcja przyjmuje wartości **niedodatnie**”, czyli ujemne lub zerowe, to do przepisu funkcji dołączysz zwrot $\boldsymbol{\leq 0}$ i obliczasz x. Dla wartości **nieujemnych**, więc dodatnich lub zerowych dołączysz zwrot $\boldsymbol{\geq 0}$.

---

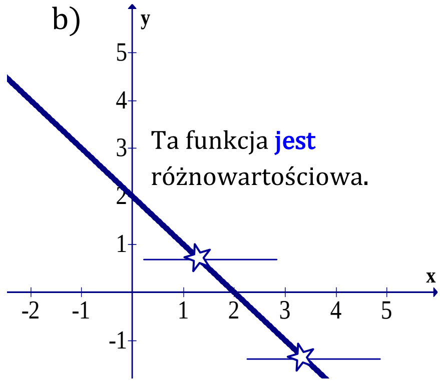
*RÓŻNOWARTOŚCIOWOŚĆ

Funkcja jest różnowartościowa, gdy dla różnych argumentów $x_1 \neq x_2$ przyjmuje różne wartości $y_1 \neq y_2$.
Łatwo to zbadać rysując na wykresie linię równoległą do osi X. Jeśli wędrując taką ścieżką miniesz na wykresie więcej niż 1 punkt (rys. a), to funkcja **nie jest różnowartościowa**. Jeśli miniesz za każdym razem tylko 1 punkt (rys. b), to funkcja **jest różnowartościowa**.

a)



b)



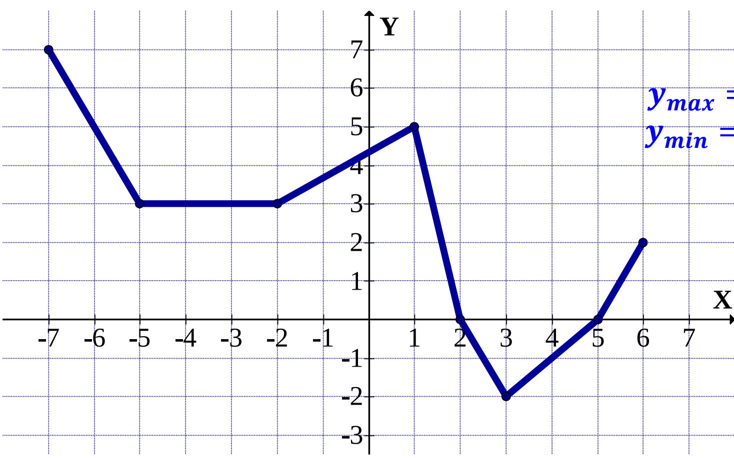
Argumenty różne, a wartość ta sama:
$x_1 \neq x_2$ i $y_1 = y_2$

Argumenty różne i wartości różne:
$x_1 \neq x_2$ i $y_1 \neq y_2$

WARTOŚĆ NAJWIĘKSZA I NAJMNIEJSZA FUNKCJI

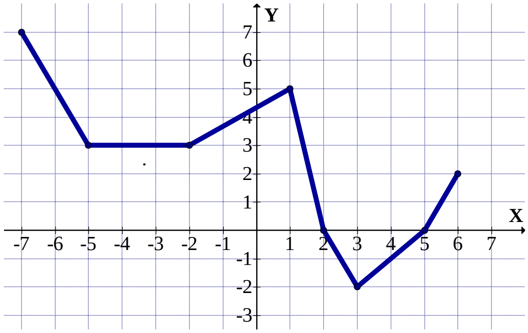
Patrzysz, jaki punkt wykresu jest najniżej i najwyżej na osi Y. Jeśli na wykresie masz puste kółko, to nie bierzesz tego punktu pod uwagę.

Maksimum to największa wartość y. Ma oznaczenie y_{max}.
Minimum to najmniejsza wartość y. Ma oznaczenie y_{min}.



$y_{max} = 7$ dla $x = -7$
$y_{min} = -2$ dla $x = 3$

ZAD. 29. Korzystając z wykresu funkcji wypisz jej własności.



®

1. Dziedzina: (od lewej do prawej)
$D = \langle -7; 6\rangle$

2. Zbiór wartości (od dołu do góry)
$ZW = \langle -2; 7\rangle$

3. Miejsca zerowe: 2 i 5

4. Monotoniczność, przedziały:
a) malejąca: $x \in \langle -7; -5\rangle, \langle 1; 3\rangle$
b) stała: $x \in \langle -5; -2\rangle$
c) rosnąca: $x \in \langle -2; 1\rangle, \langle 3; 6\rangle$)

Kiedyś, przy takim wykresie, dawało się w monotoniczności nawiasy otwarte. Od kilku lat daje się nawiasy ostre, więc i ja też tak uczyniłam.

5. Wartości dodatnie i ujemne:
$f(x) > 0$ gdy $x \in (-7; 2) \cup (5; 6)$
$f(x) < 0$ gdy $x \in (2; 5)$

***6. Różnowartościowa**: nie jest, bo gdy $x_1 \neq x_2$ to $y_1 = y_2$

7. Wartość maksymalna: $y_{max} = 7$ dla $x = -7$

8. Wartość minimalna: $y_{min} = -2$ dla $x = 3$

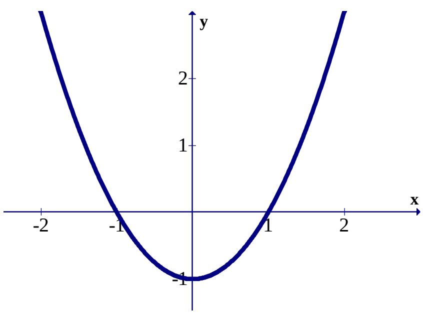
---

*PARZYSTOŚĆ I NIEPARZYSTOŚĆ

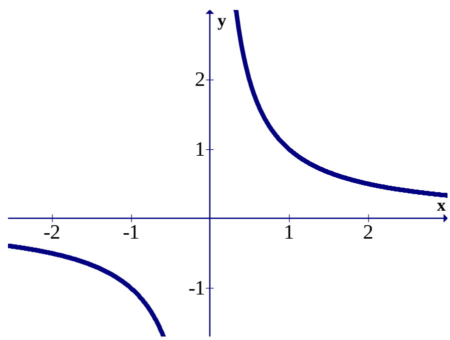
To, czy funkcja jest parzysta, czy nieparzysta, można określić:

1. Z wykresu. Funkcja **parzysta** ma wykres symetryczny do osi ***Y***.
Funkcja **nieparzysta** ma wykres symetryczny względem środka **(0; 0)**.

Wykres funkcji parzystej.



Wykres funkcji nieparzystej.



2. Parzystość i nieparzystość można też zbadać metodą rachunkową.
Parzystość sprawdzasz warunkiem: $\boldsymbol{f(x) = f(-x)}$
Nieparzystość sprawdzasz warunkiem: $\boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$

Przykład. Zbadamy parzystość funkcji $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 2x}$.
Najpierw badasz warunek parzystości i gdy $\boldsymbol{L = P}$, to funkcja jest parzysta i nieparzystości już wtedy nie badasz.
Jeśli $\boldsymbol{L \neq P}$, to wtedy jeszcze badasz nieparzystość.

a) Parzystość: $\boldsymbol{f(x) = f(-x)}$.
Wzór $\boldsymbol{f(x)}$ masz, więc obliczasz tylko $\boldsymbol{f(-x)}$ i za każde $\boldsymbol{x}$ do wzoru funkcji wstawiasz $\boldsymbol{(-x)}$;

$$\boldsymbol{f(-x)} = (-x)^3 - 2(-x) = \underline{\boldsymbol{-x^3 + 2x}}$$

nasza funkcja ma wzór $\boldsymbol{f(x)} = \underline{\boldsymbol{x^3 - 2x}}$

wyniki nie są te same, $\boldsymbol{f(x) \neq f(-x)}$, więc funkcja nie jest parzysta.

b) Badasz nieparzystość: $\boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$.
Lewą stronę już masz wyliczoną $\boldsymbol{f(-x)} = \underline{\boldsymbol{-x^3 + 2x}}$. Dla prawej piszesz minus przed wzorem i masz:

$$\boldsymbol{-f(x)} = -(x^3 - 2x) = \underline{\boldsymbol{-x^3 + 2x}}$$

Zachodzi równość $\boldsymbol{f(x) = f(-x)}$ zatem funkcja jest nieparzysta.

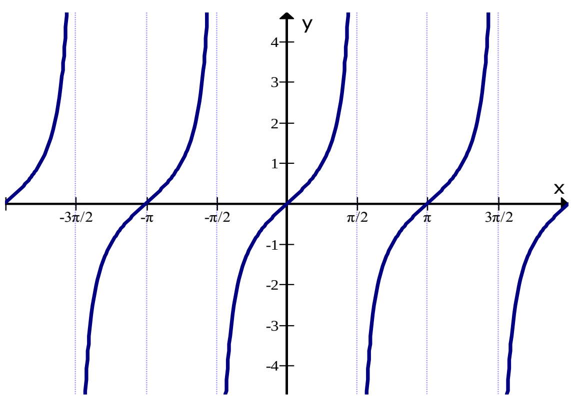
Komentarz. Funkcja może być parzysta lub może być nieparzysta lub może nie być parzysta i nie być nieparzysta. Dlatego, jeśli nie jest parzysta, to niekoniecznie jest nieparzysta. Bo nieparzysta też musi spełnić określony warunek.

----

*OKRESOWOŚĆ

Okresowa jest ta funkcja, której wykres powtarza się co pewien, stały okres. Zobaczysz to przy funkcjach trygonometrycznych: sin, cos, tg i ctg. Przy funkcjach: liniowej, kwadratowej, potęgowej, wymiernej itd. okresowości nie badasz.

Wykres okresowej funkcji $\boldsymbol{y = \mathrm{tg}x}$



----

*FUNKCJA ODWROTNA

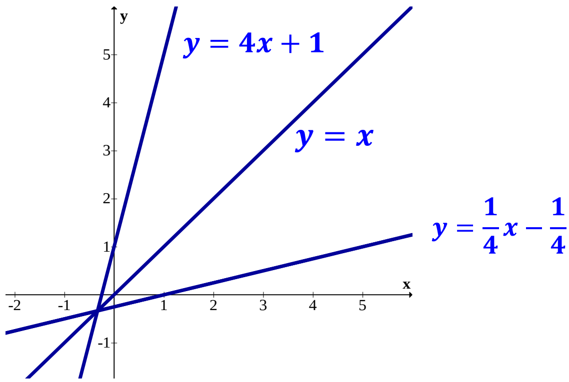
Funkcję odwrotną zapisujesz $\boldsymbol{f^{-1}}$. Wyznaczasz ją tak, że we wzorze funkcji $\boldsymbol{f}$ np. $\boldsymbol{y = 4x + 1}$ zamieniasz litery $\boldsymbol{x}$ na $\boldsymbol{y}$ i $\boldsymbol{y}$ na $\boldsymbol{x}$, a potem doprowadzasz otrzymany zapis do postaci $\boldsymbol{y =}$ (i tu pozostałe składniki).

Przykład. Wyprowadzimy wzór funkcji odwrotnej do $\boldsymbol{y = 4x + 1}$.
Po zamianie liter masz $x = 4y + 1$. Wyprowadzasz z tego zapisu y;

$$-4y = -x + 1 \quad /:(-4)$$

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}} \quad \text{to jest funkcja odwrotna.}$$

Wykresy funkcji $\boldsymbol{f}$ i $\boldsymbol{f^{-1}}$ są symetryczne względem prostej $\boldsymbol{y = x}$.



Przykład. Obliczymy funkcję odwrotną dla $\boldsymbol{f(x) = \frac{2}{x}}$ gdzie $x \neq 0$.

Funkcja $\boldsymbol{f(x) = \frac{2}{x}}$ to $\boldsymbol{y = \frac{2}{x}}$, a po zamianie liter masz $x = \frac{2}{y}$.

Z tego zapisu wyprowadzasz y;

$$x = \frac{2}{y} \quad / \cdot y \quad \text{pozbywasz się mianownika;}$$

$$xy = 2 \quad /: x \quad \text{podzielisz przez } x;$$

$$\boldsymbol{y = \frac{2}{x}} \quad \text{to jest wzór funkcji odwrotnej.}$$

W tym przypadku funkcja pierwotna i odwrotna mają te same wzory, ale nie zawsze tak jest.

---

b) $\boldsymbol{f(x) = 2x^3}$

Mamy $\boldsymbol{y = 2x^3}$ i po zamianie liter $x = 2y^3$. Wyprowadzasz y:

zamienisz strony: $2y^3 = x$

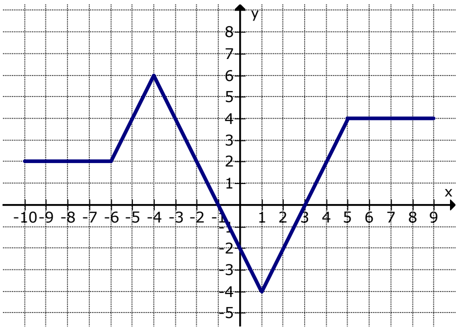
pozbywasz się 2: $2y^3 = x \quad /:2$

pierwiastkujesz: $y^3 = \frac{x}{2} \quad /\sqrt[3]{}$

$$\boldsymbol{y = \sqrt[3]{\frac{x}{2}}} \quad \text{wzór funkcji odwrotnej.}$$

Praca domowa:

1. Odczytaj z wykresu: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, wartości dodatnie i ujemne oraz wartość maksymalną i minimalną.



2. Oblicz miejsca zerowe funkcji:

a) $f(x) = x^2 - 25$ c) $f(x) = x^2 - 2x$ e) $y = 3x + 16$

b) $f(x) = x^2 - 36$ d) $y = x^2 + 6x$ f) $y = -2x + 9$

3. Wyznacz dziedzinę funkcji:

a) $\sqrt{x-7} + \sqrt{x+3}$ b) $\frac{\sqrt{x+5}}{x}$ c) $\frac{x}{x-2} + \frac{2x}{x+3} - \frac{3x}{x+7}$

*4. Wyznacz wzór funkcji odwrotnej do $f(x) = x^2$

Odpowiedzi:

1. $D = \langle -10; 9\rangle$; $ZW = \langle -4; 6\rangle$; miejsca zerowe: -1 i 3

Monotoniczność: stała: $x \in \langle -10; -6\rangle, \langle 5; 9\rangle$

rosnąca: $x \in \langle -6; -4\rangle, \langle 1; 5\rangle$

malejąca: $x \in \langle -4; 1\rangle$

Wartości dodatnie: $f(x) > 0$ gdy $x \in (-10; -1) \cup (3; 9)$

Wartości ujemne: $f(x) < 0$ gdy $x \in (-1; 3)$

Wartość maksymalna: $y_{max} = 6$ dla $x = -4$

Wartość minimalna: $y_{min} = -4$ dla $x = 1$

2. a) 5 i (-5) c) 0 i 2 e)$(-5\frac{1}{3})$

b) 6 i (-6) d) 0 i $-6)$ f) $4\frac{1}{2}$

3. a) $D = \langle 7; \infty)$ b) $D = \langle 5; \infty)\backslash\{0\}$ c) $D = R\backslash\{2, -3, -7\}$

*4. Funkcja odwrotna ma wzór $y = \sqrt{x}$