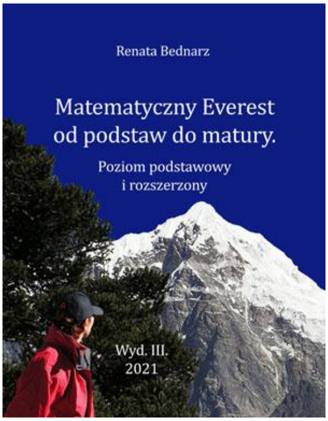

Prezentuję Ci w tym pliku:

Rozdział 19. Procenty

Rozdział 24. Jak rozwiązywać równania.

Więcej szczegółów, takich jak spis treści i inne tematy, możesz zobaczyć na mojej stronie:

www.renatabednarz.pl

19. PROCENTY

Jeden procent, czyli 1% oznacza jedną setną część z całości.

$\mathbf{1\% = \frac{1}{100}}$ lub $\mathbf{1\% = 0,01}$ $\qquad$ **1 całość = 100%**

Wytłumaczę Ci teraz wszystkie tematy związane z procentami.

ZAMIANA UŁAMKA NA PROCENT

Każdy ułamek zwykły można zamienić na procenty. Są dwa sposoby.

Sposób 1. Ułamek zwykły rozszerzasz do mianownika **100** i jaką liczbę otrzymasz w liczniku, taka jest ilość procentów. Ten sposób stosujesz, gdy w mianowniku masz: 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, bo te liczby można rozszerzyć do **100**.

$\frac{1}{2} = \frac{50}{\mathbf{100}} = 50\%$ $\qquad$ $\frac{2}{5} = \frac{40}{\mathbf{100}} = 40\%$ $\qquad$ $\frac{3}{4} = \frac{75}{\mathbf{100}} = 75\%$

Sposób 2. Jeśli mianownika nie da się rozszerzyć do **100**, to ułamek mnożysz przez **100%** jak tutaj:

$$\frac{2}{7} = \frac{2}{7} \cdot \mathbf{100\%} = \frac{2 \cdot 100}{7}\% = \frac{200}{7}\% = 28\frac{4}{7}\%$$

Liczbę dziesiętną zamienisz na procenty, gdy przesuniesz w niej przecinek o 2 miejsca w prawo:

$\mathbf{0,27} = 27\%$ $\qquad$ $\mathbf{1,4} = 1,4\mathbf{0} = 140\%$ należało dopisać **0**.

ZAMIANA PROCENTA NA UŁAMEK

Liczbę procentów napisz do licznika, a do mianownika wpisz **100**.

$9\% = \frac{9}{\mathbf{100}}$ $\qquad$ $23\% = \frac{23}{\mathbf{100}}$ $\qquad$ $300\% = \frac{300}{\mathbf{100}} = 3$

Tak samo zrobisz, gdy masz podany ułamek procenta, jak tutaj:

$$\frac{3}{7}\% = \frac{\frac{3}{7}}{\mathbf{100}} = \frac{3}{7} : 100 = \frac{3}{7} : \frac{100}{1} = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{100} = \frac{3}{700}$$

$1{,}7\% = \frac{1{,}7}{\mathbf{100}} = \frac{1{,}7}{100{,}0} = \frac{17}{1000}$

Gdy procenty chcesz zamienić procent na liczbę dziesiętną, to odetnij w niej dwa miejsca w lewą stronę:

$19\% = 0{,}19$ $3\% = 0{,}03$ $250\% = 2{,}5$

OBLICZANIE PROCENTA Z DANEJ LICZBY

Aby obliczyć procent z danej liczby **mnożysz procenty** i **liczbę.**

Przykład. Babcia chce Ci dać na wycieczkę 2% ze swej emerytury. Jej emerytura wynosi 950 zł. Jaką kwotę dostaniesz?

Mnożenie wykonasz na liczbach dziesiętnych lub ułamkach zwykłych.
Sposób 1. Na liczbach dziesiętnych. Zamień procenty na liczbę dziesiętną, to $2\% = 0{,}02$ i mnożysz ją przez 950;
$\mathbf{2\% \cdot 950} = 0{,}02 \cdot 950 = 19$ zł taką kwotę dostaniesz.

Sposób 2. Na ułamkach. Zamień 2% na ułamek, $2\% = \frac{2}{100}$ i pomnóż:
$\mathbf{2\% \cdot 950} = \frac{2}{100} \cdot 950 = \frac{2 \cdot 950}{100} = \frac{19\cancel{00}}{1\cancel{00}} = 19$ zł dostaniesz.

OBLICZANIE LICZBY Z DANEGO JEJ PROCENTA

W tym przypadku **dzielisz liczbę przez procent.**
Przykład. Babcia dała Ci na wycieczkę 19 zł i ta kwota to 2% z jej emerytury. Ile wynosi emerytura babci?
To jest zadanie odwrotne do poprzedniego. Przedtem znaliśmy wielkość emerytury babci, a teraz nie. Przedtem mnożyliśmy, a teraz dzielimy otrzymane na wycieczkę pieniądze przez procent.
$\mathbf{19 : 2\%} = 19 : 0{,}02 = \frac{19}{0{,}02} = \frac{19{,}00}{0{,}02} = \frac{1900}{2} = \mathbf{950}$
Odp. Emerytura babci wynosi 950 zł.

JAKIM PROCENTEM JEDNEJ LICZBY JEST DRUGA LICZBA

Przykład. Jakim procentem liczby **20** jest liczba **7**?
Liczba **7** jest częścią z **20**. To tak, jakby całość podzielić na 20 równych części i wziąć 7. Zapisz obie liczby do ułamka: w licznik **7**, a w mianownik **20** i masz $\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{20}}$.
Teraz wystarczy ten ułamek zamienić na procenty, więc rozszerzasz go do mianownika **100** i w liczniku już masz liczbę procentów:
$\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{20}} = \frac{\mathbf{35}}{\mathbf{100}} = 35\%$
Odp. Liczba 7 stanowi 35% liczby 20.

Przykład. Jakim procentem liczby 9 jest liczba 11?

Jest to ułamek $\frac{11}{9}$, ale nie da się go rozszerzyć do mianownika 100, więc pomnożysz go przez 100%;

$\frac{11}{9} \cdot 100\% = \frac{1100}{100}\% = 122\frac{2}{9}\%$

Odp. Liczba 11 to $122\frac{2}{9}\%$ liczby 9.

Komentarz. Jeśli uczyliście się o proporcji, to takie zadanie możesz rozwiązać przy jej pomocy. W tym przykładzie 9 to 100%, a 11 to niewiadoma $x\%$. Potem mnożysz liczby na ukos i też obliczysz x.

OBNIŻKA I PODWYŻKA PROCENTOWA

Cena wyprodukowanego towaru to zawsze 100% x.

$\mathbf{1x = 100\% \, x}$ cena początkowa.

Jeśli **obniżono** cenę o **10%**, to zapisujesz nową cenę jako **90% x**.
Jeśli **obniżono** ją o **20%**, to zapisujesz nową cenę jako **80% x**.
Jeśli **podniesiono** cenę o **10%**, to nową cenę zapisujesz jako **110% x**.
Jeśli **podniesiono** cenę o **5%**, to nową zapiszesz jako **105% x**.

Przykład. Cenę towaru obniżono o 20% i wynosi 48 zł. Ile kosztował towar przed obniżką?
Skoro cena została obniżona, to masz ją jako **80% x**.
Zapisujesz równość:
$\mathbf{80\% \, x = 48}$ zamieniasz procenty na liczbę dziesiętną;
$0{,}80 \cdot x = 48 \;\; /:0{,}80$ rozwiązujesz równanie, aby obliczyć x;
$\mathbf{x = 60}$ taka była początkowa cena.
Odp. Towar przed obniżką kosztował 60 zł.

ZAD. 12. Komputer po obniżce ceny o 10% kosztuje 1620 zł. Jaka była jego cena przed obniżką?

® Skoro cena jest obniżona o 10%, to spadła do **90% x**.
Zatem **90% x** ma wartość 1620 zł. Zapisujesz równość:
$\mathbf{90\% \, x = 1620}$ to równanie rozwiązujesz;
Zamieniasz procenty na ułamek: $90\% = 0{,}90$ i masz:
$0{,}90 \cdot x = 1620$
Działaniem odwrotnym do mnożenia jest dzielenie, więc:
$x = 1620 : 0{,}90$
$\mathbf{x = 1800}$
Odp. Komputer przed obniżką kosztował 1800 zł.

ZAD. 13. Firma szyjąca plecaki podniosła produkcję o 5%. Ile plecaków szyje obecnie, jeśli na początku szyła 300 sztuk?

® Liczba 300 to 100% poprzedniej produkcji. Oblicz, ile wynosi 5% z 300, a wtedy dowiesz się, o ile więcej plecaków szyje firma obecnie.
Mnożysz 5% przez 300;
5% · 300 $= 0{,}05 \cdot 300 = 15$ o tyle plecaków więcej szyje teraz firma.
Dodasz 15 do 300, aby uzyskać obecną wielkość produkcji:
$300 + 15 =$ **315**
Odp. Obecnie firma szyje 315 plecaków.

OBLICZANIE ODSETEK OD LOKATY

Ludzie przechowują swoje oszczędności w banku, który korzysta z ich pieniędzy i w zamian za to, dolicza klientom odsetki od powierzonej gotówki. Bank zawsze informuje, **jaki procent w skali roku** obowiązuje w jego placówce. Potem, po upływie: roku, dwóch, trzech lat lub więcej, klient otrzymuje wpłaconą gotówkę zwiększoną o dodatkowe odsetki.

Przykład. Pan Nowak wpłacił do banku na 3 lata kwotę 4000 zł. Bank oferuje oprocentowanie 5% w skali roku. Jaką kwotę wraz z odsetkami otrzyma po 3 latach?

Sposób 1. Można to zadanie rozwiązać „na piechotę" obliczając odsetki w każdym, kolejnym roku.
Dane: $\boldsymbol{K} = 4000$ zł $\quad \boldsymbol{p} = 5\%$ $\quad \boldsymbol{n} = 3$ lata
a) odsetki po pierwszym roku to 5% z 4000 zł; mnożysz procent i liczbę; 5% · **4000** zł $= 0{,}05 \cdot 4000 = 200$ zł to odsetki za pierwszy rok;
$4000 + 200 =$ **4200** zł tyle ma pieniędzy po pierwszym roku;

b) obliczasz odsetki za drugi rok, już od kwoty 4200 zł:
5% · **4200** zł $= 0{,}05 \cdot 4200 = 210$ zł odsetki za drugi rok,
$4200 + 210 =$ **4410** zł tyle ma pieniędzy po dwóch latach;

c) obliczasz odsetki po trzecim roku, już od kwoty 4410 zł.
5% · **4410** zł $= 0{,}05 \cdot 4410 = 221$ zł odsetki po trzecim roku.
$4410 + 221 =$ **4631** zł.
Odp. Pan Nowak otrzyma po 3 latach 4631 zł.

Sposób 2. Do obliczania kwoty wraz z odsetkami służy wzór:

$$\boxed{\boldsymbol{K_n = K \cdot (1 + p)^n}}$$

Kolejne symbole oznaczają:
$\boldsymbol{K_n}$ – końcowa kwota razem z odsetkami, $\boldsymbol{K_n} = ?$
$\boldsymbol{K}$ – wpłacona do banku kwota 4000 zł

$\boldsymbol{p}$ – oprocentowanie w skali roku, $5\% = 0{,}05$
$\boldsymbol{n}$ – na tyle lat wpłacone są pieniądze, $n = 3$.

Dane podstawiasz do wzoru i wykonujesz działania:

$$\boldsymbol{K_n = K \cdot (1 + p)^n}$$
$$K_3 = 4000 \cdot (1 + 0{,}05)^3$$
$$K_3 = 4000 \cdot (1{,}05)^3$$
$$K_3 = 4000 \cdot 1{,}157625 = \mathbf{4631} \text{ zł.}$$

Odp. Po 3 latach oszczędzania pan Nowak otrzyma 4631 zł.

PROCENT SKŁADANY – KAPITALIZACJA ODSETEK

Ten temat przerabiasz w szkole średniej.
Oprocentowanie lokaty podawane jest **zawsze** w skali roku. Bank ustala je przy założeniu, że powierzasz mu pieniądze na rok, dwa i więcej.
Gdy jednak zajdzie potrzeba i musisz wcześniej swe oszczędności wypłacić, to za okres, kiedy Twoje pieniądze były w banku i tak nie dostaniesz odsetek. Dlatego wymyślono takie lokaty, w których odsetki dopisywane są w trakcie roku kalendarzowego np. co 2 miesiące. Takie okresowe doliczanie odsetek nazywamy **kapitalizacją**.

Okresy kapitalizacji oznaczamy literą $\boldsymbol{m}$.
Gdy odsetki dopisywane są:
– co miesiąc, to masz 12 takich okresów w roku i $\boldsymbol{m = 12}$,
– co kwartał, czyli co 3 miesiące, to są **4** takie okresy w roku i $\boldsymbol{m = 4}$,
– co 6 miesięcy, to masz **2** takie okresy w roku i wtedy $\boldsymbol{m = 2}$.

Na obliczenie kapitalizowanej kwoty wraz z odsetkami jest wzór:

$$\boxed{\boldsymbol{K_n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100 \cdot m}\right)^{n \cdot m}}}$$

Przykład. Kwotę 4000 zł wpłacasz do banku na 3 lata, a oprocentowanie wynosi 5% w skali roku. Kapitalizacja jest co pół roku. Jaką kwotę wraz z odsetkami otrzymasz po upływie 3 lat?
Wypisujesz dane:

$\boldsymbol{K_n} = ?$ $\boldsymbol{K} = 4000$ zł $\boldsymbol{n} = 3$ lata $\boldsymbol{p} = 5\% = \frac{5}{100}$ $\boldsymbol{m} = 2$

Podstawiasz liczby do wzoru i wykonujesz działania:

$$\boldsymbol{K_n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100 \cdot m}\right)^{n \cdot m}}$$

$K_3 = 4000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100 \cdot 2}\right)^{3 \cdot 2}$ obliczasz oba mnożenia;

$K_3 = 4000 \cdot \left(1 + \frac{5}{200}\right)^6$ $\frac{5}{200} = 5 : 200 = 0{,}025$

$K_3 = 4000 \cdot (1 + 0{,}025)^6$ dodajesz w nawiasie;

$K_3 = 4000 \cdot 1{,}025^6$ najpierw potęgujesz, potem mnożysz;
$K_3 = \mathbf{4639}$ tę kwotę wraz z odsetkami masz po 3 latach.

Wskazówka. Potęgę $1{,}025^6$ możesz obliczyć kalkulatorem łatwiej, niż mnożąc te czynniki po kolei. Zrób tak: pomnóż 1,025 przez 1,025 to masz wynik do potęgi 2-ej, a teraz wciśnij klawisz „=” i masz wynik z podniesienia do potęgi 3-ej, znów wciśnij „=” i masz wynik do potęgi 4-ej, znów „=”, to masz wynik do potęgi 5-ej i ostatnie „=” to masz wynik z podniesienia 1,025 do potęgi szóstej.

Praca domowa:

1. Zamień ułamki na procenty:
a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{7}{10}$ c) $\frac{9}{20}$ d) $\frac{6}{25}$ e) 0,65 f) 0,04 g) 3,14 h) 4

2. Zamień procenty na ułamki lub liczbę:
a) 3% b) 76% c) 123% d) 300% e) 4000%

3. Oblicz: a) 4% z liczby 524 b) 20% z liczby 640

4. Oblicz liczbę, której: a) 25% wynosi 68 b) 14% wynosi 280

5. Która z liczb a, b, c, jest największa:
$a =$ 12% z liczby 300 $b =$ 15% z liczby 250 $c =$ 18% z liczby 220

6. Odtwarzacz mp3 po obniżce ceny o 10% kosztuje 180 zł. Jaka była jego cena przed obniżką?

7. Cena płyty została podniesiona o 20% i obecnie wynosi 48 zł. Jaka była jej cena przed podwyżką?

8. Jan Kowalski wpłacił do banku kwotę 5000 zł na 4 lata. Bank zaoferował mu oprocentowanie 3% w skali roku i kapitalizację co pół roku. Jaką kwotę z odsetkami otrzyma po upływie tego terminu?

Odpowiedzi:

1. a) 75% d) 24% g) 314%
b) 70% e) 65% h) 400%
c) 45% f) 4%
2. a) 0,03 b) 0,76 c) 1,23 d) 3 e) 40
3. a) 20,96 b) 128
4. a) 272 b) 2000
5. Największa jest liczba $c = 39{,}6$
6. 200 zł. 7. 40 zł. 8. 5632 zł.

24. Jak rozwiązywać równania

Na początku pokażę Ci, czym się różni działanie od równania.

1. Działanie ma znak „=" na końcu. Wykonujesz obliczenia, redukujesz wyrazy podobne i za znakiem „=" zapisujesz wynik np.:

$\mathbf{4 \cdot x + 3 - 2 \cdot x + 5} =$ obliczasz oba mnożenia;

$= \underline{4x} + 3 - \underline{2x} + 5 =$ redukujesz wyrazy podobne;

$= \mathbf{2x + 8}$ to jest końcowy wynik.

2. Równanie ma znak „=" gdzieś w środku np. $\mathbf{2x + 3x = 9 + 6}$.
Jest w nim niewiadoma $\boldsymbol{x}$ i wyrazy wolne **9** oraz **6**.
Rozwiązanie równania polega na tym, aby obliczyć, ile wynosi $\boldsymbol{x}$.

Równania będziesz rozwiązywać od V klasy szkoły podstawowej aż do ostatniej klasy szkoły średniej, więc solidnie przyłóż się do tego tematu.

W każdym równaniu, więc także w $\mathbf{2x + 3x = 9 + 6}$ są dwie strony:
— **lewa** jest po lewej stronie znaku „=", to liczby $2x$ i $3x$,
— **prawa** jest po prawej stronie znaku „=", to liczby 9 i 6.
Lewa strona to kraina niewiadomych, a **prawa** to kraina wolnych liczb.

Rozwiązywanie równania zaczynasz od wykonania działań, więc dodajesz z lewej i z prawej strony: $\mathbf{2x + 3x = 9 + 6}$

masz teraz $\mathbf{5x = 15}$

Ten zapis oznacza, że **5** pomnożone przez nieznane $\boldsymbol{x}$ daje wynik **15**.
Jeśli chcesz obliczyć $\boldsymbol{x}$, należy wykonać działanie odwrotne;
$\mathbf{5x}$ to inaczej $\mathbf{5 \cdot x}$, więc do mnożenia wykonuj dzielenie. Zapisujesz je stawiając za równaniem ukośną kreskę i znak dzielenia przez **5**.
Teraz masz tak $\mathbf{5x = 15 \ /{:}\,5}$
Takim zapisem informujesz, że obie strony równania dzielisz przez **5**.
Dobrze jest zapisać potem tę operację na kreskach ułamkowych:

$\frac{5x}{5} = \frac{15}{5}$ z lewej strony skrócisz 5;

$\frac{\cancel{5}x}{\cancel{5}} = \frac{15}{5}$ z prawej strony wyłączysz całości;

$\boldsymbol{x = 3}$ ta liczba była ukryta pod $\boldsymbol{x}$.

Odp. Rozwiązaniem równania jest liczba 3.

Obie strony równania możesz pomnożyć lub podzielić przez tę samą liczbę różną od zera, a wartość równania nie zmieni się.

Do obu stron równania możesz dodać lub odjąć tę samą liczbę.

Przykład. Rozwiążemy równanie $\mathbf{2x + 5x - 3x = 26 - 6}$.
Gdy obliczysz działania z lewej i prawej strony, otrzymasz $\mathbf{4x = 20}$.
Wiemy, że $\mathbf{4x}$ to $\mathbf{4 \cdot x}$, więc **4** pomnożone przez $\boldsymbol{x}$ daje wynik **20**.

Jeśli masz mnożenie, stosuj działanie odwrotne, czyli dzielenie.

$\mathbf{4x = 20 \quad /:4}$

$\frac{4x}{4} = \frac{20}{4}$ zapisujesz dzielenie na kreskach ułamkowych;

$\frac{\cancel{4}x}{\cancel{4}} = 5$ z lewej skracasz 4, a prawa strona ma wyłączone całości;

$x = 5$

Odp. Rozwiązaniem równania jest liczba 5.

Przykład. Rozwiążemy równanie $3x + 8 = -7x + 28$.

Zauważ, że jest w nim nieporządek. 8 jest po lewej stronie, a ma być po prawej, $(-7x)$ jako niewiadoma, jest po prawej stronie, a ma być po lewej. Najpierw składniki należy uporządkować, aby niewiadome były z lewej strony, a wiadome z prawej.

Przenosisz $(-7x)$ na lewą stronę, a wiadomą liczbę 8 na prawą.

Podczas przenoszenia składników z jednej strony na drugą, należy im zmieniać znaki na przeciwne: ujemny na dodatni, a dodatni na ujemny.

$\mathbf{3x + 8 = -7x + 28}$ po przeniesieniu składników otrzymasz:

$3x + 7x = 28 - 8$ z lewej strony dodaj, z prawej odejmij;

$10x = 20 \quad / : 10$ dzielisz obie strony przez 10;

$\frac{10x}{10} = \frac{20}{10}$ z lewej skracasz 10, z prawej wyłączasz całości;

$\frac{\cancel{10}x}{\cancel{10}} = 2$ po skróceniu masz: $x = 2$

Odp. Rozwiązaniem równania jest 2. **Mówimy, że 2 spełnia równanie.**

Do każdego równania możesz zrobić sprawdzenie. Wtedy upewnisz się, że Twój wynik jest poprawny.

Sprawdzenie.

Podstawiasz 2 w miejsce każdego x do równania i badasz, czy wynik z lewej strony jest ten sam, co z prawej, czyli czy $L = P$.

$\underline{\mathbf{3x + 8 = -7x + 28}}$ takie jest równanie;

$L = 3x + 8 = 3 \cdot 2 + 8 = 6 + 8 = 14$

$P = -7x + 28 = -7 \cdot 2 + 28 = -14 + 28 = 14$ więc $L = P$

Przykład. Rozwiążemy równanie $7 \cdot (x - 2) - 3 = 9$.

Niewiadoma jest w nawiasie i trzeba ją z tego nawiasu wydobyć.

Aby wykonać mnożenie przez nawias, stosujesz prawo rozdzielności mnożenia względem odejmowania;

$\mathbf{7 \cdot (x - 2) - 3 = 9}$ wymnażasz 7 przez każdy składnik z nawiasu;

$7 \cdot x - 7 \cdot 2 - 3 = 9$ obliczasz mnożenie;

$7x - 14 - 3 = 9$ liczby (-14) i (-3) przenosisz na prawą stronę;

$7x = 9 + \ 14 + 3$ obliczasz dodawanie;
$7x = 26 \quad /: 7$ obie strony równania dzielisz przez 7;
$\frac{\cancel{7}x}{\cancel{7}} = \frac{26}{7}$ skracasz 7 i wyłączasz całości;
$\boldsymbol{x = 3\frac{5}{7}}$
Zapisanie dzielenia w postaci ułamka jest dobre, bo dla niepodzielnych liczb np. 26 i 7 łatwiej jest wyłączyć całości.
Odp. Rozwiązaniem równania jest $3\frac{5}{7}$.

Przykład. Rozwiążemy równanie $\boldsymbol{5 \cdot (x + 4) - (2x - 6) = 11}$.
Masz tu mnożenie i minus przed drugim nawiasem. Do mnożenia zastosujesz prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania, a drugi nawias opuścisz pisząc jego składniki z przeciwnymi znakami:
$\boldsymbol{5 \cdot (x + 4) - (2x - 6) = 11}$
$5x + 20 - 2x + 6 = 11$ wiadome liczby przenosisz na prawo;
$5x - 2x = 11 - 20 - 6$ wykonujesz działania po każdej stronie;
$3x = -15 \quad /: 3$ dzieląc przez 3 pozbywasz się 3 przy x;
$x = -\frac{15}{3}$ wyłączasz całości;
$\boldsymbol{x = -5}$
Odp. Rozwiązaniem równania jest liczba (-5).

Przykład. W równaniu $\boldsymbol{\frac{x-12}{5} = x}$ należy pozbyć się 5 w mianowniku.
Przez 5 jest tu **dzielenie**, to wykonujesz działanie odwrotne, **mnożenie**. Tylko tak pozbędziesz się 5 w mianowniku.
$\boldsymbol{\frac{x-12}{5} = x} \quad / \cdot 5$ z każdej strony równania pojawi się 5;
$\boldsymbol{5} \cdot \frac{x-12}{5} = \boldsymbol{5} \cdot \ x$ po lewej stronie skracasz, po prawej mnożysz;
$\cancel{5}^1 \cdot \frac{x-12}{\cancel{5}_1} = 5x$ zapisujesz, co masz po skróceniu;
$1 \cdot (x - 12) = 5x$ wykonujesz mnożenie przez nawias;
$1x - 12 = 5x$ niewiadome przenosisz na lewą, a wiadome na prawą;
$1x - 5x = 12$ wykonujesz odejmowanie;
$-4x = 12 \ /: (-4)$ obie strony dzielisz przez (-4);
$\frac{-\cancel{4}x}{-\cancel{4}} = \frac{12}{-4}$ to $x = \frac{12}{-4}$ więc $\boldsymbol{x = -3}$
Sprawdzenie. Podstawiasz (-3) za każde $\boldsymbol{x}$ do równania $\boldsymbol{\frac{x-12}{5} = x}$
$\boldsymbol{L = \frac{x-12}{5}} = \frac{-3-12}{5} = \frac{-15}{5} = \boldsymbol{-3}$; $\boldsymbol{P = x = -3}$ to $\boldsymbol{L = P}$
Odp. Rozwiązaniem równania jest liczba $(-3\ )$.

Podsumowanie.

– Jeśli masz w równaniu **dzielenie** np. $\frac{x}{3} = 5$, to **pomnóż** je przez **3**. Wtedy niewygodny mianownik skróci się.

– Jeśli masz w równaniu **mnożenie** np. $3x = 12$, to **podziel** je przez **3** i otrzymasz szukane x.

Przykład. Zbadamy, czy **6** jest rozwiązaniem równania $3x - 8 = 9$.

Jeśli jest rozwiązaniem, to po wstawieniu **6** za x, lewa strona równania jest równa prawej stronie.

$L = 3x - 8 = 3 \cdot 6 - 8 = 10$

$P = 9$ wyniki są inne;

$L \neq P$

Odp. Liczba 6 nie jest rozwiązaniem równania.

Możesz też napisać odpowiedź, że liczba 6 nie spełnia równania.

Przykład. Rozwiążemy równanie $\frac{2x-5}{3} - \frac{5x-1}{4} = 7x + 2$.

Należy pozbyć się mianowników 3 i 4, więc obie strony mnożysz przez wspólny mianownik 12.

$\frac{2x-5}{3} - \frac{5x-1}{4} = 7x + 2 \quad / \cdot 12$ przed każdym składnikiem piszesz 12;

$12 \cdot \frac{2x-5}{3} - 12 \cdot \frac{5x-1}{4} = 12 \cdot 7x + 12 \cdot 2$ skracasz;

$\cancel{12}^4 \cdot \frac{2x-5}{\cancel{3}_1} - \cancel{12}^3 \cdot \frac{5x-1}{\cancel{4}_1} = 12 \cdot 7x + 12 \cdot 2$ zapisujesz mnożenie;

$4 \cdot (2x - 5) - 3 \cdot (5x - 1) = 84x + 24$ obliczasz działania;

$8x - 20 - 15x + 3 = 84x + 24$ przenosisz składniki;

$8x - 15x - 84x = 24 + 20 - 3$ redukujesz wyrazy podobne;

$-91x = 41 \quad /: (-91)$ pozbywasz się (-91) przy x;

$x = \frac{41}{-91}$ wyłączasz $(-)$ przed ułamek;

$x = -\frac{41}{91}$ Odp. Rozwiązaniem równania jest liczba $\left(-\frac{41}{91}\right)$.

Przykład!!! Rozwiążemy równanie $2(x + 3) = 4x - 2x + 7$, które nie ma rozwiązania. Z takimi również się spotkasz.

Najpierw wykonasz mnożenie po lewej stronie i otrzymasz:

$2x + 6 = 4x - 2x + 7$ przenosisz niewiadome na lewo i 6 na prawo;

$2x - 4x + 2x = 7 - 6$ obliczasz działania po lewej i prawej stronie;

$0 = 1$ **to jest sprzeczność**, bo przecież $0 \neq 1$.

Jak widzisz, skróciło się x i masz fałsz.

Odp. Równanie nie ma rozwiązania.

Przykład!!! Rozwiążemy równanie $\mathbf{4x+6=2\cdot(2x+3)}$ i okaże się, że ma ono nieskończenie wiele rozwiązań.
Wykonasz mnożenie po prawej stronie i otrzymasz:
$\mathbf{4x+6=4x+6}$ przenosisz niewiadome i wiadome;
$4x-4x=6-6$ po wykonaniu działań otrzymasz:
$\mathbf{0=0}$ skróciło się x i mamy równość prawdziwą.
Takie równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań.
Możemy to łatwo sprawdzić.
Podstawmy do równania $\underline{\mathbf{4x+6=2\cdot(2x+3)}}$ dowolną liczbę np. **5**;
Mamy wtedy $\mathbf{4\cdot 5+6=2\cdot(2\cdot 5+3)}$

$$26=2\cdot 13$$

$\mathbf{26=26}$ **prawda, 5 spełnia równanie.**

Cokolwiek podstawisz za x, zawsze otrzymasz prawdę. Tak więc każda liczba jest rozwiązaniem tego równania. To równanie ma nieskończoną ilość rozwiązań.

Przykład. Rozwiążemy równania z I klasy szkoły średniej:
a) $\mathbf{\sqrt{3}x-2=4x+1}$ niewiadome dasz na lewo, a wiadome na prawo;
$\sqrt{3}x-4x=1+2$ wykonasz dodawanie z prawej strony;
$\sqrt{3}x-4x=3$ z lewej strony nie można odjąć tych x, to sytuację uratuje tylko wyłączenie x przed nawias;
$\mathbf{x(\sqrt{3}-4)=3}$ dzielisz obie strony przez $(\sqrt{3}-4)$;
$x=\frac{3}{(\sqrt{3}-4)}$ uwalniasz mianownik od niewymierności;
$x=\frac{3}{(\sqrt{3}-4)}\cdot\frac{\mathbf{\sqrt{3}+4}}{\mathbf{\sqrt{3}+4}}$ mnożysz ułamki;
$x=\frac{3\cdot(\sqrt{3}+4)}{(\sqrt{3}-4)\cdot(\sqrt{3}+4)}$ w mianowniku wzór $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
$x=\frac{3\sqrt{3}+12}{\sqrt{3}^2-4^2}$ obliczasz mianownik;
$x=\frac{3\sqrt{3}+12}{3-16}$ to $x=\frac{3\sqrt{3}+12}{-13}$ to $\mathbf{x=\frac{-3\sqrt{3}-12}{13}}$
Odp. Rozwiązaniem równania jest liczba $x=\frac{-3\sqrt{3}-12}{13}$.

---

b) $\mathbf{(x+4)^2=(x-3)(x+3)-(-4+3x)}$
Zastosuj tu dwa wzory skróconego mnożenia: po lewej stronie i po prawej oraz opuść ostatni nawias zmieniając składnikom znaki.
$x^2+2\cdot x\cdot 4+4^2=x^2-3^2+4-3x$ obliczasz działania;
$x^2+8x+16=x^2-9+4-3x$ przeprowadzka składników;
$x^2+8x-x^2+3x=-9+4-16$ redukujesz wyrazy podobne;
$\cancel{x^2}+8x-\cancel{x^2}+3x=-21$ redukujesz, skróci się x^2;

$11x = -21 \quad /:11$ dzielisz obie strony przez 11;

$x = \frac{-21}{11}$ wyłączasz całości;

$\boldsymbol{x = -1\frac{10}{11}}$

Odp. Rozwiązaniem jest liczba $(-1\frac{10}{11})$. Ta liczba spełnia równanie.

----

c) $\boldsymbol{x^2 - 9 = 0}$ rozpisz lewą stronę według wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$\boldsymbol{(x-3)(x+3) = 0}$ skoro wynik tego mnożenia jest zerem, to choć jeden z nawiasów musi być zerem; na tej podstawie rozdzielasz to równanie na dwa oddzielne:

$\boldsymbol{x - 3 = 0}$ lub $\boldsymbol{x + 3 = 0}$ przenosisz wiadome na prawo:

$\boldsymbol{x = 3}$ lub $\boldsymbol{x = -3}$

Odp. Rozwiązaniem równania jest liczba 3 lub (-3).

----

d) masz do rozwiązania równanie $\boldsymbol{x^2 + 9 = 0}$.

Tej sumy nie można rozpisać wzorem $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

Poza tym z dodawania $\boldsymbol{x^2 + 9}$ nie otrzymasz nigdy wyniku zerowego.

O braku rozwiązania możesz przekonać się też tak:

$\boldsymbol{x^2 + 9 = 0}$ przenieś $\boldsymbol{9}$ na prawą stronę;

$\boldsymbol{x^2 = -9}$ to jest **sprzeczność.**

Każda liczba podniesiona do kwadratu, da wynik dodatni lub zerowy, a tu masz ujemny.

Odp. Równanie nie ma rozwiązania; x należy do zbioru pustego, $x \in \emptyset$.

----

e) równanie $\boldsymbol{2x^2 - 10x = 0}$ jest kwadratowe, świadczy o tym $\boldsymbol{x^2}$.

Zanim w szkole średniej nauczysz się teorii o równaniach kwadratowych, już w VIII klasie, na podstawie tego, co Ci wcześniej wytłumaczyłam, możesz takie równanie rozwiązać.

Z obu składników tej różnicy wyłącz $\boldsymbol{x}$ przed nawias:

$\boldsymbol{2x^2 - 10x = 0}$ z każdego składnika zabierasz jedno $\boldsymbol{x}$;

$\boldsymbol{x \cdot (2x - 10) = 0}$

Skoro wynik z tego mnożenia jest zerem, to na pewno chociaż jeden z czynników: $\boldsymbol{x}$ lub $\boldsymbol{(2x - 10)}$ musi oznaczać zero. Wobec tego każdy czynnik możesz przyrównać do zera i to zapisujesz tak:

$\boldsymbol{x = 0}$ lub $\boldsymbol{2x - 10 = 0}$ w drugim równaniu przenosisz 10;

$2x = 10 \ /:2$ dzielisz przez 2 i wyliczasz x;

$\boldsymbol{x = 5}$

Odp. Rozwiązaniem równania jest liczba 0 lub 5.

Komentarz.

Przykładów równań jest mnóstwo. Pokazałam Ci tylko te ze szkoły podstawowej. W szkole średniej będziesz rozwiązywać równania z zakresu rozmaitych funkcji. Wytłumaczyłam Ci je przy funkcjach: liniowej, kwadratowej, wielomianowej, wymiernej, wykładniczej, logarytmicznej itd. Znajdziesz je w rozdziałach o tych funkcjach.

Praca domowa:

1. Sprawdź, czy liczba 5 spełnia równanie:

a) $3 \cdot (x+1) = x + 13$ b) $3 \cdot (x-4) = 12$

2. Rozwiąż równania:

a) $8 \cdot (x-7) = 10$ c) $-3 \cdot (6x-2) = 15$ e) $5 - (x+2) = -3x$
b) $0{,}5 \cdot (6x+10) = 8$ d) $2x + 3 \cdot (x+4) = 7$ f) $-(3x-4) = 5$

3. Rozwiąż równania:

a) $\frac{x-3}{2} = 4$ b) $\frac{2x+1}{5} = 6$ c) $\frac{x+5}{2} + \frac{x-4}{3} = 8$ d) $\frac{2x-3}{4} - \frac{x-1}{3} = 5$

4. Rozwiąż równania:

a) $x^2 - 4 = 0$ c) $x^2 - 5x = 0$ e) $x^2 + 4 = 0$
b) $x^2 - 25 = 0$ d) $x^2 + 3x = 0$ f) $x^2 + 1 = 0$

5. Rozwiąż równania:

a) $(x+3)^2 + 7x = x^2 + 1$ b) $(x-3) \cdot (x+3) + 8 = 4x + x^2$

6. Rozwiąż równania:

a) $4x + 5 = 2 \cdot (2x+1)$ b) $6 \cdot (2x-1) = 5x + 7x - 6$

Odpowiedzi:

1. a) tak b) nie
2. a) $8\frac{1}{4}$ b) 1 c) $-\frac{1}{2}$ d) -1 e) $-1\frac{1}{2}$ f) $-\frac{1}{3}$
3. a) 11 b) $14\frac{1}{2}$ c) $8\frac{1}{5}$ d) $32\frac{1}{2}$
4. a) 2 lub -2 c) 0 lub 5 e) brak rozwiązania
   b) 5 lub -5 d) 0 lub -3 f) brak rozwiązania
5. a) $x = -\frac{8}{13}$ b) $x = -\frac{1}{4}$
6. a) brak rozwiązania b) nieskończona ilość rozwiązań.