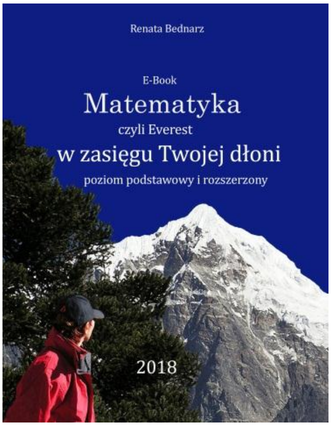

Przedstawiam Ci w tym pliku:

- Rozdział 19: Procenty

- Rozdział 24: Jak rozwiązywać równania

Więcej treści poznasz na mojej internetowej stronie: www.renatabednarz.pl

19. PROCENTY

Jeden procent, czyli 1%, oznacza jedną setną część z całości.

$\mathbf{1\% = \frac{1}{100}}$ lub $\mathbf{1\% = 0,01}$ $\qquad$ **1 całość = 100%**

Wytłumaczę Ci teraz najważniejsze tematy związane z procentami.

ZAMIANA UŁAMKA NA PROCENT

Każdy ułamek zwykły można zamienić na procenty. Są dwa sposoby.

Sposób 1. Ułamek zwykły rozszerzysz do mianownika **100** i jaką liczbę otrzymasz w liczniku, taka jest liczba procentów. Ten sposób stosujesz, gdy w mianowniku masz: 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, bo te liczby można rozszerzyć do **100**.

$\frac{1}{2} = \frac{50}{\mathbf{100}} = 50\%$ $\qquad$ $\frac{2}{5} = \frac{40}{\mathbf{100}} = 40\%$ $\qquad$ $\frac{3}{4} = \frac{75}{\mathbf{100}} = 75\%$

Sposób 2. Jeśli mianownika nie da się rozszerzyć do **100**, to ułamek mnożysz przez **100%** jak tutaj:

$$\mathbf{\frac{2}{7}} = \frac{2}{7} \cdot \mathbf{100\%} = \frac{2 \cdot 100}{7}\% = \frac{200}{7}\% = 28\frac{4}{7}\%$$

Ułamek dziesiętny zamienisz na procenty, gdy przesuniesz w nim przecinek o 2 miejsca w prawo;

$\mathbf{0,27} = 27\%$ $\qquad$ $\mathbf{1,4} = 1,40 = 140\%$

ZAMIANA PROCENTA NA UŁAMEK

Liczbę procentów napisz do licznika, a do mianownika wpisz **100**.

$9\% = \frac{9}{\mathbf{100}}$ $\qquad$ $23\% = \frac{23}{\mathbf{100}}$ $\qquad$ $300\% = \frac{300}{\mathbf{100}} = 3$

Tak samo zrobisz, gdy masz podany ułamek procenta:

$$\frac{3}{7}\% = \frac{\frac{3}{7}}{\mathbf{100}} = \frac{3}{7} : 100 = \frac{3}{7} : \frac{100}{1} = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{100} = \frac{\mathbf{3}}{700}$$

$$1{,}7\% = \frac{1{,}7}{\mathbf{100}} = \frac{1{,}7}{100{,}0} = \frac{17}{1000}$$

Gdy procenty chcesz zamienić na ułamek dziesiętny, to odetnij w liczbie dwa miejsca w lewą stronę:

$19\% = 0{,}19$ $\quad$ $3\% = 0{,}03$ $\quad$ $250\% = 2{,}5$

OBLICZANIE PROCENTA Z DANEJ LICZBY

Aby obliczyć procent z liczby **mnożysz procenty i liczbę.**

Przykład. Babcia chce Ci dać na wycieczkę 2% ze swej emerytury. Jej emerytura wynosi 950 zł. Jaką kwotę dostaniesz?

Mnożenie wykonasz na liczbach dziesiętnych lub ułamkach zwykłych.
Sposób 1. Zamień procenty na liczbę dziesiętną, to $2\% = 0{,}02$ i mnożysz ją przez 950;
$\mathbf{2\% \cdot 950} = 0{,}02 \cdot 950 = 19$ zł dostaniesz.

Sposób 2. Procenty zamień na ułamek zwykły, $2\% = \frac{2}{100}$ i pomnóż:
$\mathbf{2\% \cdot 950} = \frac{2}{100} \cdot 950 = \frac{2 \cdot 950}{100} = \frac{19\cancel{00}}{1\cancel{00}} = 19$ zł
Odp. Na wycieczkę dostaniesz od babci 19 zł.

OBLICZANIE LICZBY Z DANEGO JEJ PROCENTA

W tym przypadku **dzielimy liczbę przez procent.** Przywołamy zadanie z babcią.
Przykład. Babcia dała Ci na wycieczkę 19 zł, a ta kwota to 2% z jej emerytury. Ile wynosi emerytura babci?
To jest zadanie odwrotne do poprzedniego. Przedtem mnożyliśmy, a teraz dzielimy liczbę przez procent.
$\mathbf{19 : 2\%} = 19 : 0{,}02 = \frac{19}{0{,}02} = \frac{19{,}00}{0{,}02} = \frac{1900}{2} = \mathbf{950}$
Odp. Emerytura babci wynosi 950 zł.

JAKIM PROCENTEM JEDNEJ LICZBY JEST DRUGA LICZBA

Przykład. Jakim procentem liczby **20** jest liczba **7**?
Liczba **7** jest częścią liczby **20**. To tak, jakby całość podzielić na 20 części i wziąć 7. Zapisujemy obie liczby do ułamka, w licznik **7**, a w mianownik **20**, to mamy $\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{20}}$.

Teraz ten ułamek trzeba zamienić na procenty, więc rozszerzamy go do mianownika **100** i w liczniku otrzymamy liczbę procentów:

$\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{20}} = \frac{\mathbf{35}}{\mathbf{100}} = 35\%$

Odp. Liczba 7 stanowi 35% liczby 20.

Przykład. Jakim procentem liczby **9** jest liczba **11**?

Jest to ułamek $\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{9}}$, ale nie da się go rozszerzyć do mianownika **100**, więc pomnożymy go przez **100%**:

$\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{9}} \cdot \mathbf{100\%} = \frac{1100}{9}\% = 122\frac{2}{9}\%$

Odp. Liczba 11 to$122\frac{2}{9}\%$ liczby 9.

Takie zadania możesz też wykonać przy pomocy proporcji. W tym przykładzie 9 to 100%, a 11 to niewiadoma x%. I mnożysz na ukos.

OBNIŻKA I PODWYŻKA PROCENTOWA

Cena wyprodukowanego towaru to zawsze 100% $\boldsymbol{x}$.

$\mathbf{1}\boldsymbol{x} = \mathbf{100\%}\ \boldsymbol{x}$ cena początkowa

Jeśli obniżono cenę o **10%**, to zapisujesz nową cenę jako **90%** $\boldsymbol{x}$.
Jeśli obniżono ją o **20%**, to zapisujesz nową cenę jako **80%** $\boldsymbol{x}$.
Jeśli podniesiono cenę o **10%**, to nową cenę zapisujesz jako **110%** $\boldsymbol{x}$.
Jeśli podniesiono cenę o **5%**, to nową cenę zapiszesz jako **105%** $\boldsymbol{x}$.

Przykład. Cenę towaru obniżono o 20% i wynosi ona teraz 48 zł. Ile kosztował towar przed obniżką?

Skoro cena została obniżona, to mamy teraz **80%** $\boldsymbol{x}$.
Zapisujemy:
$\mathbf{80\%}\ \boldsymbol{x} = \mathbf{48}$ zamieniamy procenty na liczbę dziesiętną;
$0{,}80 \cdot x = 48 \ /: 0{,}80$ rozwiązujemy równanie, aby obliczyć x;
$\boldsymbol{x} = \mathbf{60}$ taka była początkowa cena.
Odp. Towar przed obniżką kosztował 60 zł.

ZAD. 12. Komputer po obniżce ceny o 10% kosztuje 1620 zł. Jaka była jego cena przed obniżką?

® Skoro cena jest obniżona, to spadła do **90%** $\boldsymbol{x}$.
Zatem **90%** $\boldsymbol{x}$ ma wartość 1620 zł. Tworzymy równanie:
$\mathbf{90\%}\ \boldsymbol{x} = \mathbf{1620}$
Zamieniamy procenty na ułamek: $90\% = 0{,}90$ i mamy:
$0{,}90 \cdot x = 1620$
Działaniem odwrotnym do mnożenia jest dzielenie, a więc:

$x = 1620 : 0{,}90$
$\boldsymbol{x = 1800}$
Odp. Komputer przed obniżką kosztował 1800 zł.

ZAD. 13. Firma szyjąca plecaki podniosła wydajność produkcji o 5%. Ile plecaków szyje obecnie, jeśli początkowo szyła 300 sztuk?

® Liczba 300 to 100% poprzedniej produkcji. Obliczymy, ile wynosi 5% z 300, a wtedy dowiemy się, o ile więcej plecaków szyje firma obecnie.
Mnożymy 5% przez 300:
5% z $300 = 0{,}05 \cdot 300 = 15$ o tyle plecaków więcej szyje teraz firma.
Dodamy 15 do 300, aby uzyskać obecną wielkość produkcji:
$300 + 15 = \mathbf{315}$
Odp. Obecnie firma szyje 315 plecaków.

OBLICZANIE ODSETEK OD LOKATY

Ludzie przechowują swoje oszczędności w banku, który korzysta z ich pieniędzy i w zamian za to dolicza klientom odsetki od powierzonej gotówki. Bank zawsze informuje, **jaki procent w skali roku** obowiązuje w jego placówce. Po upływie terminu: roku, dwóch, trzech lat lub więcej, klient otrzymuje wpłaconą kwotę powiększoną o odsetki naliczane co rok.

Przykład. Pan Nowak wpłaca do banku na 3 lata kwotę 4000 zł. Bank proponuje mu oprocentowanie 5% w skali roku. Jaką kwotę wraz z odsetkami otrzyma po 3 latach?

Sposób 1. Można to zadanie rozwiązać „na piechotę" obliczając odsetki w każdym, kolejnym roku.
Dane: $\boldsymbol{K} = 4000$ zł $\boldsymbol{p} = 5\%$ $\boldsymbol{n} = 3$ lata
a) odsetki po pierwszym roku to 5% z 4000 zł, mnożymy procent i liczbę: $5\% \cdot \mathbf{4000}$ zł $= 0{,}05 \cdot 4000 = 200$ zł odsetki za pierwszy rok,
$4000 + 200 = \mathbf{4200}$ zł tyle jest po upływie pierwszego roku,

b) obliczamy odsetki za drugi rok, już od kwoty 4200 zł:
$5\% \cdot \mathbf{4200}$ zł $= 0{,}05 \cdot 4200 = 210$ zł odsetki za drugi rok,
$4200 + 210 = \mathbf{4410}$ zł tyle jest pieniędzy po dwóch latach,

c) obliczamy odsetki po trzecim roku, już od kwoty 4410 zł.
$5\% \cdot \mathbf{4410}$ zł $= 0{,}05 \cdot 4410 = 221$ zł odsetki po trzecim roku.
$4410 + 221 = \mathbf{4631}$ zł otrzyma pan Nowak po 3 latach oszczędzania.

Sposób 2. Do obliczania kwoty wraz z odsetkami służy wzór:

$$\boxed{\boldsymbol{K_n = K \cdot (1 + p)^n}}$$

Kolejne symbole oznaczają:
$\boldsymbol{K_n}$– końcowa kwota razem z odsetkami, $\boldsymbol{K_n}$= ?
$\boldsymbol{K}$ – wpłacona do banku kwota 4000 zł
$\boldsymbol{p}$ – oprocentowanie w skali roku, $5\% = 0{,}05$
$\boldsymbol{n}$ – na tyle lat wpłacone są pieniądze, $n = 3$

Dane podstawiamy do wzoru:

$$\boldsymbol{K_n = \mathrm{K} \cdot (1 + p)^n}$$
$$K_3 = 4000 \cdot (1 + 0{,}05)^3$$
$$K_3 = 4000 \cdot (1{,}05)^3$$
$$K_3 = 4000 \cdot 1{,}157625 = \mathbf{4631}$$

Odp. Po 3 latach oszczędzania pan Nowak otrzyma kwotę 4631 zł.

PROCENT SKŁADANY – KAPITALIZACJA ODSETEK

Oprocentowanie lokaty podawane jest w skali roku. Bank ustala je przy założeniu, że powierzasz mu pieniądze na rok, dwa lub więcej. Gdyby jednak zaistniała potrzeba, że musisz je wcześniej wypłacić, to za tę część roku nie otrzymasz odsetek. Dlatego ustanowiono również inne lokaty, w których odsetki dopisywane są w trakcie roku kalendarzowego, np. co 3 miesiące. Takie okresowe naliczanie odsetek nazywamy **kapitalizacją**.

Okresy kapitalizacji oznaczamy $\boldsymbol{m}$. Gdy odsetki dopisywane są:
– co miesiąc, to masz 12 takich okresów w roku i $\boldsymbol{m = 12}$,
– co kwartał, czyli co 3 miesiące, to są **4** takie okresy w roku i $\boldsymbol{m = 4}$,
– co 6 miesięcy, to masz **2** takie okresy w roku i wtedy $\boldsymbol{m = 2}$.

Na obliczenie kapitalizowanej kwoty wraz z odsetkami jest wzór:

$$\boxed{\boldsymbol{K_n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100 \cdot m}\right)^{n \cdot m}}}$$

Przykład. Kwotę 4000 zł wpłacasz do banku na 3 lata, a oprocentowanie wynosi 5% w skali roku. Kapitalizacja jest co pół roku. Jaką kwotę wraz z odsetkami otrzymasz po upływie 3 lat?

Dane:
$\boldsymbol{K_n} = ?$ $\boldsymbol{K} = 4000$ zł $\boldsymbol{n} = 3$ lata $\boldsymbol{p} = 5\% = \frac{5}{100}$ $\boldsymbol{m} = 2$
Podstawiamy liczby do wzoru i wykonujemy działania:

$$\boldsymbol{K_n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100 \cdot m}\right)^{n \cdot m}}$$

$$K_3 = 4000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100 \cdot 2}\right)^{3 \cdot 2}$$

$$K_3 = 4000 \cdot \left(1 + \frac{5}{200}\right)^{6} \qquad \frac{5}{200} = 5 : 200 = 0{,}025$$

$$K_3 = 4000 \cdot (1 + 0{,}025)^6$$

$K_3 = 4000 \cdot 1{,}025^6 = \mathbf{4639}$ tę kwotę z odsetkami masz po 3 latach.

Wskazówka. Potęgę $1{,}025^6$ możesz obliczyć przy pomocy kalkulatora łatwiejszym sposobem niż mnożąc czynniki po kolei.
Pomnóż tylko 1,025 przez 1,025 to masz wynik z podniesienia do potęgi drugiej, a gdy teraz wciśniesz klawisz „=” , to masz już wynik z podniesienia do potęgi trzeciej, znów naciśnij „=”, to masz wynik do potęgi czwartej, znowu „=”, to masz wynik podniesienia do potęgi piątej i ostatnie „=” to masz wynik podniesienia 1,025 do potęgi szóstej.

Praca domowa:

1. Zamień ułamki na procenty:

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{7}{10}$ c) $\frac{9}{20}$ d) $\frac{6}{25}$ e) 0,65 f) 0,04 g) 3,14 h) 4

2. Zamień procenty na ułamki lub liczbę:

a) 3% b) 76% c) 123% d) 300% e) 4000%

3. Oblicz 4% z liczby 524.

4. Oblicz liczbę, której 25% wynosi 68.

5. Odtwarzacz mp3 po obniżce ceny o 10% kosztuje 180 zł. Jaka była jego cena przed obniżką?

6. Cena płyty została podniesiona o 20% i obecnie wynosi 48 zł. Jaka była jej cena przed podwyżką?

7. Jan Kowalski wpłacił do banku kwotę 5000 zł na 4 lata. Bank zaproponował mu oprocentowanie 3% w skali roku i kapitalizację co pół roku. Jaką kwotę wraz z odsetkami otrzyma po upływie tego terminu?

Odpowiedzi:

1. a) 75% d) 24% g) 314%
   b) 70% e) 65% h) 400%
   c) 45% f) 4%

2. a) 0,03 b) 0,76 c) 1,23 d) 3 e) 40

3. 20,96

4. 272 5. 200 6. 40 7. 5632 zł.

24. Jak rozwiązywać równania

Na początku naucz się rozróżniać działanie algebraiczne od równania.
1. Działanie algebraiczne ma znak „=” na końcu. Wykonujesz obliczenia, redukujesz wyrazy podobne i za znakiem „=” piszesz wynik, np.:

$$\mathbf{4 \cdot x + 3 - 2 \cdot x + 5 =}$$
$$= \underline{4x} + 3 - \underline{2x} + 5$$
$$= \mathbf{2x + 8}$$

2. Równanie ma znak równości w środku np. $\mathbf{2x + 3x = 9 + 6}$.
Jest w nim niewiadoma $\boldsymbol{x}$ i wyrazy wolne **9** oraz **6**.
Rozwiązanie równania polega na tym, aby obliczyć, ile wynosi $\boldsymbol{x}$.

Równania będziesz rozwiązywać od V klasy szkoły podstawowej aż do ostatniej klasy szkoły średniej, więc solidnie przyłóż się do tego tematu.

W każdym równaniu, więc także w $\mathbf{2x + 3x = 9 + 6}$ są dwie strony:
– **lewa** jest po lewej stronie znaku „=”, to są liczby $2x$ i $3x$,
– **prawa** jest po prawej stronie znaku „=”, to liczby 9 i 6.
Lewa strona to kraina niewiadomych, a **prawa** to kraina wolnych liczb.

Rozwiązywanie równania zaczynamy od wykonania działań, więc dodajemy z lewej i prawej strony: $\mathbf{2x + 3x = 9 + 6}$
to $\mathbf{5x = 15}$
Ten zapis oznacza, że 5 pomnożone przez nieznane $\boldsymbol{x}$ daje **15**.
Jeśli chcemy obliczyć $\boldsymbol{x}$, musimy wykonać działanie odwrotne;
$\mathbf{5x}$ to inaczej $\mathbf{5 \cdot x}$, więc do tego mnożenia wykonamy dzielenie. Zapisujemy je stawiając za równaniem ukośną kreskę, a za nią znak dzielenia przez **5**. Teraz mamy tak: $\mathbf{5x = 15 \ /:5}$
W ten sposób informujemy, że obie strony równania podzielimy na **5**.
Dobrze jest zapisać potem tę operację na kreskach ułamkowych:

$\mathbf{\frac{5x}{5} = \frac{15}{5}}$ z lewej strony skrócimy 5;

$\mathbf{\frac{\cancel{5}x}{\cancel{5}} = \frac{15}{5}}$ z prawej strony wyłączymy całości;

$\mathbf{x = 3}$ ta liczba była ukryta pod $\boldsymbol{x}$.

Odp. Rozwiązaniem równania jest liczba 3.

Obie strony równania możemy pomnożyć lub podzielić przez tę samą liczbę różną od zera, a wartość równania nie zmieni się.
Do obu stron równania możemy dodać lub odjąć ta samą liczbę.

Przykład. Rozwiążemy równanie $\mathbf{2x + 5x - 3x = 26 - 6}$.
Gdy obliczymy działania, to otrzymamy: $\mathbf{4x = 20}$.

Wiemy, że $\boldsymbol{4x}$ to $\boldsymbol{4 \cdot x}$, więc $\mathbf{4}$ pomnożone przez $\boldsymbol{x}$ daje nam liczbę $\mathbf{20}$.

Jeśli mamy mnożenie, to stosujemy działanie odwrotne, czyli dzielenie.
$\boldsymbol{4x = 20 \quad /:4}$ zapisujemy dzielenie na kreskach ułamkowych;
$\boldsymbol{\frac{4x}{4} = \frac{20}{4}}$ z lewej strony skracamy, z prawej wyłączamy całości;
$\boldsymbol{\frac{\cancel{4}x}{\cancel{4}} = 5}$ to $\boldsymbol{x = 5}$
Odp. Rozwiązaniem równania jest liczba 5.

Przykład. Rozwiążemy równanie $\boldsymbol{3x + 8 = -7x + 28}$.
Zauważ, że panuje w nim nieporządek, $\mathbf{8}$ jest po lewej stronie, a ma być po prawej, $(\boldsymbol{-7x})$ jako niewiadoma jest po prawej stronie, a ma być po lewej. Najpierw składniki musimy uporządkować, aby niewiadome były z lewej strony, a wiadome z prawej.
Przenosimy $(\boldsymbol{-7x})$ na lewą stronę, a wiadomą liczbę $\mathbf{8}$ na prawą.

Podczas przenoszenia składników z jednej strony na drugą, należy składnikom zmieniać znaki na przeciwne: ujemny na dodatni, a dodatni na ujemny.

$\boldsymbol{3x + 8 = -7x + 28}$ po przeniesieniu otrzymamy:
$3x + 7x = 28 - 8$ z lewej strony dodajemy, z prawej odejmujemy;
$10x = 20 \quad /:10$ dzielimy obie strony przez 10;
$\frac{10x}{10} = \frac{20}{10}$ z lewej skracamy 10, a z prawej wyłączamy całości;
$\frac{\cancel{10}x}{\cancel{10}} = 2$ po skróceniu mamy:
$\boldsymbol{x = 2}$
Odp. Rozwiązaniem równania jest 2.

Mówimy, że 2 spełnia równanie.

Do każdego równania można zrobić sprawdzenie. Wtedy upewnisz się, że Twój wynik jest poprawny.
Sprawdzenie.
Podstawiamy $\mathbf{2}$ w miejsce każdego $\boldsymbol{x}$ do równania i obliczamy, czy wynik z lewej strony jest ten sam, co z prawej, czyli czy $\boldsymbol{L = P}$.
$\boldsymbol{3x + 8 = -7x + 28}$ takie jest nasze równanie;
$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{3x + 8} = 3 \cdot \mathbf{2} + 8 = 6 + 8 = \mathbf{14}$
$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{-7x + 28} = -7 \cdot \mathbf{2} + 28 = -14 + 28 = \mathbf{14}$
$\boldsymbol{L = P}$

Przykład. Rozwiążemy równanie $\mathbf{7 \cdot (x-2) - 3 = 9}$.

Niewiadoma jest w nawiasie i trzeba ją z tego nawiasu wydobyć.
Aby wykonać mnożenie przez nawias, stosujesz prawo rozdzielności mnożenia względem odejmowania;

$\mathbf{7 \cdot (x-2) - 3 = 9}$
$7 \cdot x - 7 \cdot 2 - 3 = 9$ wyliczamy;
$7x - 14 - 3 = 9$ liczby (-14) i (-3) przenosimy na prawą stronę;
$7x = 9 + 14 + 3$ obliczamy dodawanie po prawej stronie;
$7x = 26 \quad /: 7$ obie strony równania dzielimy przez 7;
$\frac{\cancel{7}x}{\cancel{7}} = \frac{26}{7}$ po skróceniu i wyłączeniu całości otrzymamy
$\mathbf{x = 3\frac{5}{7}}$
Zapisanie dzielenia w postaci ułamka jest dobre, bo dla niepodzielnych liczb 26 i 7 łatwiej jest wyłączyć całości.
Odp. Rozwiązaniem równania jest $3\frac{5}{7}$.

Przykład. Rozwiążemy równanie $\mathbf{5 \cdot (x+4) - (2x-6) = 11}$.
Mamy tu mnożenie i minus przed drugim nawiasem. Do mnożenia zastosujemy prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania, a drugi nawias opuścimy pisząc jego składniki z przeciwnymi znakami:

$\mathbf{5 \cdot (x+4) - (2x-6) = 11}$
$5x + 20 - 2x + 6 = 11$ wiadome liczby przenosimy na prawo;
$5x - 2x = 11 - 20 - 6$ wykonujemy działania po każdej stronie;
$3x = -15 \quad /: 3$
$x = -\frac{15}{3}$
$\mathbf{x = -5}$
Odp. Rozwiązaniem równania jest liczba (-5).

Przykład. W równaniu $\mathbf{\frac{x-12}{5} = x}$ należy pozbyć się 5 w mianowniku.
Przez 5 jest tu **dzielenie**, to wykonuje się działanie odwrotne, **mnożenie**.
Tylko tak pozbędziemy się 5 w mianowniku.
$\frac{x-12}{5} = x \quad / \cdot 5$ z każdej strony równania pojawi się 5;
$\mathbf{5} \cdot \frac{x-12}{5} = \mathbf{5} \cdot x$ po lewej stronie skracamy, po prawej mnożymy;
$\cancel{5}^1 \cdot \frac{x-12}{\cancel{5}_1} = 5x$ zapisujemy, co otrzymaliśmy po skróceniu;
$1 \cdot (x-12) = 5x$ wykonujemy mnożenie przez nawias;
$1x - 12 = 5x$ niewiadome przenosimy na lewą, a wiadome na prawą;
$1x - 5x = 12$ wykonujemy odejmowanie;

$-4x = 12 \;\; /:(-4)$ obie strony dzielimy przez (-4);

$\frac{\cancel{-4}x}{\cancel{-4}} = \frac{12}{-4}$

$x = \frac{12}{-4}$ to $\boldsymbol{x = -3}$

Sprawdzenie.

Podstawiamy (-3) za każde $\boldsymbol{x}$ do równania $\boldsymbol{\frac{x-12}{5} = x}$

$\boldsymbol{L = \frac{x-12}{5}} = \frac{-3-12}{5} = \frac{-15}{5} = -3$

$\boldsymbol{P = x} = -3 \quad \boldsymbol{L = P}$

Odp. Rozwiązaniem jest liczba (-3).

Wskazówka.

Jeśli masz w równaniu **dzielenie**, np. $\boldsymbol{\frac{x}{3} = 5}$, to **pomnóż** strony przez **3**. Wtedy niewygodny mianownik skróci się.

Jeśli masz w równaniu **mnożenie**, np. $\boldsymbol{3x = 12}$, to **podziel** obie strony równania przez **3** i otrzymasz szukane $\boldsymbol{x}$.

Przykład. Zbadamy, czy **6** jest rozwiązaniem równania $\boldsymbol{3x - 8 = 9}$.

Jeśli jest, to po wstawieniu **6** w miejsce $\boldsymbol{x}$, lewa strona jest równa prawej.

$\boldsymbol{L = 3x - 8 =} 3 \cdot \boldsymbol{6} - 8 \boldsymbol{= 10}$

$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{9}$ wyniki są inne, $\boldsymbol{L \neq P}$

Odp. Liczba 6 nie spełnia równania.

Przykład. Rozwiążemy równanie $\boldsymbol{\frac{2x-5}{3} - \frac{5x-1}{4} = 7x + 2}$.

Należy pozbyć się mianowników 3 i 4, więc obie strony mnożymy przez wspólny mianownik 12.

$\boldsymbol{\frac{2x-5}{3} - \frac{5x-1}{4} = 7x + 2} \quad / \cdot 12$ przed każdym składnikiem piszemy 12;

$\boldsymbol{12 \cdot \frac{2x-5}{3} - 12 \cdot \frac{5x-1}{4} = 12 \cdot 7x + 12 \cdot 2}$ skracamy;

$\boldsymbol{\cancel{12}}^{4} \cdot \frac{2x-5}{\cancel{3}_1} - \boldsymbol{\cancel{12}}^{3} \cdot \frac{5x-1}{\cancel{4}_1} = \boldsymbol{12} \cdot 7x + \boldsymbol{12} \cdot 2$ zapisujemy mnożenie;

$4 \cdot (2x - 5) - 3 \cdot (5x - 1) = 84x + 24$ obliczamy działania;

$8x - 20 - 15x + 3 = 84x + 24$ przeprowadzka składników;

$8x - 15x - 84x = 24 + 20 - 3$ redukujemy wyrazy podobne;

$-91x = 41 \quad /:(-91)$

$x = \frac{41}{-91}$

$\boldsymbol{x = -\frac{41}{91}}$

Odp. Rozwiązaniem równania jest liczba $(-\frac{41}{91})$.

Przykład. Rozwiążemy równanie z VIII klasy szkoły podstawowej:

$(\boldsymbol{x}+\mathbf{4})^{\mathbf{2}}=(\boldsymbol{x}-\mathbf{3})(\boldsymbol{x}+\mathbf{3})-(-\mathbf{4}+\mathbf{3}\boldsymbol{x})$

Należy tu zastosować wzory skróconego mnożenia i włączyć minus do ostatniego nawiasu.

$x^2+2\cdot x\cdot 4+4^2= x^2-3^2+4-3x$ obliczamy działania;
$x^2+8x+16=x^2-9+4-3x$ przeprowadzka składników;
$x^2+8x-x^2+3x=-9+4-16$ redukujemy wyrazy podobne;
$\cancel{x^2}+8x-\cancel{x^2}+3x=-21$
$11x=-21 \quad /:11$ dzielimy obie strony równania przez 11;
$x=\frac{-21}{11}$
$\boldsymbol{x}=-\mathbf{1}\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{11}}$
Odp. Rozwiązaniem równania jest liczba $(-1\frac{10}{11})$.

Przykłady. Rozwiążemy równania z VIII klasy szkoły podstawowej:

a) $\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{9}=\mathbf{0}$ rozpiszemy lewą stronę według wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
$(\boldsymbol{x}-\mathbf{3})(\boldsymbol{x}+\mathbf{3})=\mathbf{0}$ skoro wynik tego mnożenia jest zerem, to jeden z nawiasów musi być zerem; na tej podstawie rozdzielamy to równanie na dwa oddzielne:
$\boldsymbol{x}-\mathbf{3}=\mathbf{0}$ lub $\boldsymbol{x}+\mathbf{3}=\mathbf{0}$ rozwiązujemyc każde z nich:
$\boldsymbol{x}=\mathbf{3}$ lub $\boldsymbol{x}=-\mathbf{3}$
Odp. Rozwiązaniem równania jest liczba 3 lub (-3).

----

b) w równaniu $\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{9}=\mathbf{0}$ tej sumy nie można rozpisać według wzoru skróconego mnożenia; poza tym gołym okiem widać, że z sumy $\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{9}$ nie otrzymamy wyniku zerowego, łatwo się o tym przekonasz:

$\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{9}=\mathbf{0}$ przenosimy $\mathbf{9}$ na prawą stronę;
$\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}=-\mathbf{9}$ to sprzeczność, bo każda liczba podniesiona do kwadratu, daje wynik dodatni, a tu mamy ujemny.
Odp. Równanie nie ma rozwiązania.
Możesz napisać, że x należy do zbioru pustego, $x\in\emptyset$.

----

c) równanie $\mathbf{2}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{10}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ jest kwadratowe, świadczy o tym $\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}$.
W szkole średniej poznasz równania kwadratowe, ale już w podstawówce dowiesz się, jak można niektóre z nich rozwiązać. Otóż, z obu składników tej różnicy należy wyłączyć $\boldsymbol{x}$ przed nawias:
$\mathbf{2}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{10}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ z każdego składnika zabieramy jedno $\boldsymbol{x}$;

$\boldsymbol{x \cdot (2x - 10) = 0}$ skoro wynik mnożenia jest zerem, to jeden z czynników: $\boldsymbol{x}$ lub $\boldsymbol{(2x - 10)}$ musi oznaczać zero; wobec tego każdy z czynników można przyrównać do zera:

$\boldsymbol{x = 0}$ lub $\boldsymbol{2x - 10 = 0}$ wyliczamy $\boldsymbol{x}$;

$2x = 10 \ /: 2$

$\boldsymbol{x = 5}$

Odp. Rozwiązaniem równania jest 0 lub 5.

Komentarz. W szkole średniej będziesz uczyć się rozwiązywać równania z zakresu różnych funkcji. Objaśniam Ci je przy funkcji: liniowej, kwadratowej, wymiernej, wykładniczej, itd.

Praca domowa:

1. Sprawdź, czy liczba 5 spełnia równanie:

a) $3 \cdot (x + 1) = x + 13$ b) $3 \cdot (x - 4) = 12$

2. Rozwiąż równania:

a) $8 \cdot (x - 7) = 10$ c) $-3 \cdot (6x - 2) = 15$ e) $5 - (x + 2) = -3x$

b) $0{,}5 \cdot (6x + 10) = 8$ d) $2x + 3 \cdot (x + 4) = 7$ f) $-(3x - 4) = 5$

3. Rozwiąż równania:

a) $\frac{x-3}{2} = 4$ b) $\frac{2x+1}{5} = 6$ c) $\frac{x+5}{2} + \frac{x-4}{3} = 8$ d) $\frac{2x-3}{4} - \frac{x-1}{3} = 5$

4. Rozwiąż równania:

a) $x^2 - 4 = 0$ c) $x^2 - 5x = 0$ e) $x^2 + 4 = 0$

b) $x^2 - 25 = 0$ d) $x^2 + 3x = 0$ f) $x^2 + 1 = 0$

5. Rozwiąż równania:

a) $(x + 3)^2 + 7x = x^2 + 1$ b) $(x - 3) \cdot (x + 3) + 8 = 4x + x^2$

Odpowiedzi:

1. a) tak b) nie
2. a) $8\frac{1}{4}$ b) 1 c) $-\frac{1}{2}$ d) -1 e) $-1\frac{1}{2}$ f) $-\frac{1}{3}$
3. a) 11 b) $14\frac{1}{2}$ c) $8\frac{1}{5}$ d) $32\frac{1}{2}$
4. a) 2 lub -2 c) 0 lub 5 e) brak rozwiązania
   b) 5 lub -5 d) 0 lub -3 f) brak rozwiązania
5. a) $x = -\frac{8}{13}$ b) $x = -\frac{1}{4}$